PROBLEMES ARITHMETIQUES

ARTICULATION SENS ET PROCEDURES DE RESOLUTION.

Marie-Lise PELTIER-BARBIER
Maître de conférences en didactique des mathématiques
IUFM de ROUEN
Equipe de recherche DIDIREM, Université Paris 7

Résumé
Cet article propose un synthèse de divers travaux relevant des champs de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques sur la question de la construction du sens dans le cas particulier des problèmes arithmétiques. Il s'agit d'apporter des éléments théoriques permettant de mieux comprendre comment les élèves peuvent donner du sens à un énoncé de problème et s'engager dans la résolution. Et de faire des choix argumentés pour planifier l'enseignement des problèmes arithmétiques à l'école élémentaire.

Abstract
This article proposes a synthesis of various work concerned with the fields of cognitive psychology and the fields of didactic of mathematics on the question of the construction of the meaning in the particular case of the arithmetic problems. It is a question of bringing theoretical elements making it possible to better understand how the students can give sense to a problem statement and engage themselves into the resolution. It is also a question of making sound choices in order to plan the teaching of the arithmetic problems at the elementary school.

Introduction

La question de l'enseignement des opérations et des problèmes arithmétiques est récurrente. Comment articuler le travail sur les problèmes à la nécessaire acquisition de techniques opératoires ? Comment travailler le "sens" des opérations ? Que signifie "construire du sens" ? Dans cet article, je me propose de "revisiter" ces questions à la lumière de divers travaux sur ce champ, en tentant de présenter tout d'abord différents points de vue complémentaires sur la notion de sens.

Actuellement en effet, un des slogans de la pédagogie est la nécessaire construction du sens. Le postulat sur lequel s'appuie ce slogan est que une connaissance ne peut être fonctionnelle que dans la mesure où elle est porteuse de sens pour le sujet qui la possède. D'une manière rapide on pourrait dire qu'une connaissance est porteuse de sens pour un sujet si ce dernier est capable d'identifier un champ d'application de cette connaissance. Mais cette formulation est relativement réductrice dans la mesure où elle renvoie surtout à un aspect "fonctionnel" des connaissances, elle prend en compte le sujet, mais ignore en partie la nature et la valeur intrinsèques des connaissances.

D'un point de vue philosophique, nous pouvons envisager cette question du sens à la suite de G. DELEUZE[1] (1969) à partir de l'articulation entre trois dimensions :
- la première est relative à ce que Gilles DELEUZE désigne par "référence", que l'on pourrait caractériser de manière un peu simpliste comme liaison avec le monde réel , on pourrait également dire que la référence articule les propositions aux objets dont elles parlent, elle renvoie à une certaine fonctionnalité du savoir, et à une forme d'objectivité puisque dans ce domaine les propositions seront susceptibles de vérification.
- La seconde est "la signification", cette dimension renvoie aux concepts eux-mêmes et aux relations entre les concepts. Dans cette dimension, les propositions sont susceptibles d'avoir une valeur de vérité, on peut parler de pertinence ou d'absurdité des propositions énoncées.
- La dernière "la manifestation" concerne la prise en charge subjective des propositions, le sujet s'approprie les propositions ou s'en distancie, c'est la relation du sujet au savoir.

Du point de vue de la psychologie cognitive, le sens est défini en référence au sujet.
Pour VERGNAUD[2] par exemple, le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants.
"Plus précisément ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. Les schèmes c'est à dire les conduites et leur organisation. Le sens de l'addition pour un sujet individuel c'est l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter les situations auxquelles il lui arrive d'être confronté et qui implique l'idée d'addition, c'est aussi l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers qui représentent l'addition".

D'un point de vue didactique, pour BROUSSEAU par exemple qui s'appuie ici sur la pensée de Bachelard, le sens d'une connaissance se définit par trois ensembles :
a) la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique (sémantique)
b) la collection des problèmes où cette connaissance intervient comme solution (pragmatique)
c) l'ensemble des conceptions, des choix antérieurs qu'elle rejette (histoire individuelle et collective).
On voit ici apparaître la notion de conception, à la fois d'un point de vue épistémologique et d'un point de vue psychologique.

Dans chacun des paradigmes nous retrouvons avec des poids différents la relation au monde, l'aspect subjectif, les caractéristiques théoriques et épistémologiques des savoirs.

Pour l'enseignant qui a pour objectif de travailler sur les opérations arithmétiques, la question du sens va se poser à trois niveaux
- celui du concept (sens de l'addition, de la soustraction, de la multiplication etc.)
- celui du problème (comment aider les enfants à comprendre un problème et à le résoudre)
- celui de l'articulation entre la compréhension du problème et la mise en œuvre d'une procédure de résolution.

---

[1] cité par FABRE M. (1999), Situations problèmes.
[2] VERGNAUD G. (1990), RDM 10.2.3

I. Le sens d'un concept

I.1. Concept et champ conceptuel

Nous nous appuierons sur la définition proposée par G. VERGNAUD[3] :
“ Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques, conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations. Toutefois l'action opératoire n'est pas le tout de la conceptualisation du réel, loin de là. On ne débat pas de la vérité ou de la fausseté d'un énoncé totalement implicite, et on n'identifie pas les aspects du réel auxquels il faut prêter attention, sans l'aide de mots, d'énoncés, de symboles et de signes. L'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation. C'est ce qui conduit à considérer qu'un concept est un triplet de trois ensembles:

C = (S, I, ###)

S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence);
1: l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationalité des schèmes (le signifié);
###: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).
Etudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois. Il n'y a pas en général de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations. ”

Mais les concepts ne sont pas isolés, ils sont constitués en réseau et entretiennent des relations entre eux, ce qui conduit G. VERGNAUD à définir des "champs conceptuels" (dans d'autres disciplines on parle aussi de "trames conceptuelles")

Dans un premier temps VERGNAUD[4] définit un champ conceptuel comme *"un ensemble de situations, ce qui permet de générer des classifications reposant sur l'analyse des tâches cognitives et des procédures pouvant être mises en jeu dans chacune d'elles".*
Ainsi par exemple le champ conceptuel des structures additives est l'ensemble des situations, au sens de tâches, qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations. Cette première approche permet de *“ générer une classification reposant sur l'analyse des tâches cognitives et des procédures pouvant être mises en jeu dans chacune d'entre elles".* Puis il précise *"le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques, sont ainsi constitutifs des structures additives les concepts de cardinal, de mesure, de transformation temporelle, de relation de comparaison quantifiée, d'inversion [...].".*
Cette seconde approche conduit à affiner la classification qui de ce fait est à la fois mathématique et psychologique.

---

[3] Ibid
[4] Ibid.

La théorie de champs conceptuels n'est pas à proprement parler une théorie "didactique", c'est une théorie du développement cognitif qui résulte, comme nous venons de le dire, de considérations psychologiques et mathématiques. Elle permet une analyse des situations didactiques, mais aussi des difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves, du répertoire de procédures disponibles, des formes de représentations possibles, etc.
En Didactique des mathématiques, M. ARTIGUE[5] reprend cette définition de concept de la manière suivante en la positionnant par rapport à celle de "conception" :
"Comme on distingue dans un concept mathématique la notion mathématique telle qu'elle est définie dans le contexte du savoir savant à une époque donnée, l'ensemble des signifiants associés au concept, la classe de problèmes dans la résolution desquels il prend son sens, les outils théorèmes, techniques algorithmiques spécifiques du traitement du concept,
on distinguera dans les conceptions des sujets ces diverses composantes, et en particulier :
la classe des situations problèmes qui donnent son sens au concept pour l'élève, l'ensemble des signifiants qu'il est capable de lui associer en particulier les images mentales, les expressions symboliques, les outils théorèmes, algorithmes dont il dispose pour manipuler le concept."

I 2. Les champs conceptuels des structures additives et des structures multiplicatives

G. VERGNAUD distingue dans les problèmes, les nombres qui désignent des états, qui sont des nombres réels (positifs s'ils désignent des états mesures, positifs ou négatifs s'ils désignent des états repères) et des nombres qui traduisent une transformation ou une comparaison et qui, eux, sont des réels positifs ou négatifs.
Ainsi, dans l'énoncé " Chloé a 57 images, elle en donne 15 à Jeanne. Combien d'images Chloé a-t-elle maintenant ?", le nombre "57" désigne un état (l'avoir initial de Chloé), lorsque Chloé donne 15 images à Jeanne, il s'agit d'une transformation qui ici est négative et peut donc se représenter par le nombre "-15", La question porte sur la détermination de l'état final, c'est à dire le nombre d'images de Chloé après la transformation de son avoir.
Prenons un autre exemple : "Pierre a 27 billes, Victor a 15 billes de plus que Pierre, combien de billes a Victor ?", le nombre 27 désigne un état, c'est le référent de la comparaison, la comparaison est positive "+15", on cherche l'état référé, c'est à dire l'avoir de Victor.

Pour les structures additives, G. VERGNAUD identifie six relations de bases à partir desquelles il est possible d'engendrer la quasi-totalité des problèmes d'addition et de soustraction de l'arithmétique ordinaire (cf. annexe 1).
Cette classification très fine s'appuie à la fois sur une analyse mathématique des objets en jeu et des relations entre ces objets et sur une analyse psychologique de la tâche à effectuer pour résoudre le problème.

La classification qui consiste à catégoriser les problèmes selon qu'ils se résolvent de manière experte par une addition ou par une soustraction faisait fi de ces deux analyses pour se centrer seulement sur les écritures mathématiques traduisant non le problème mais sa solution et l'on en déduisait hâtivement que les problèmes conduisant à effectuer une soustraction étaient plus difficiles que ceux nécessitant une addition. Le contre exemple suivant permet d'infirmer cette conception et de montrer que la difficulté d'un problème est essentiellement liée à sa structure et à l'élément de cette structure sur lequel porte la question.

---

5 ARTIGUE M. (1984), Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques, Thèse de doctorat d'Etat, PARIS VII.

Ainsi le problème : "Paul avait 105F dans son porte-monnaie. Il a dépensé 99F. Quelle somme d'argent a-t-il maintenant dans son porte-monnaie ?" Ne pose pas de grandes difficultés aux élèves bien qu'il s'agisse d'une soustraction, tandis que le problème : "Marie fait des courses, elle dépense 150F. Il lui reste alors 200F dans son porte-monnaie. Combien d'argent avait-elle dans son porte-monnaie avant d'effectuer ses courses ?", problème qui nécessite une addition, est un problème difficile bien que la situation soit familière, que les nombres en jeu soient simples, et que l'opération à effectuer soit élémentaire.

L'approche de G. VERGNAUD permet de mettre en évidence la nécessaire simultanéité de l'apprentissage de l'addition et de la soustraction, elle permet de conduire une analyse a priori des situations en précisant les relations mathématiques abordées et la tâche des élèves.

En ce qui concerne les structures multiplicatives, G. VERGNAUD propose 4 classes : la comparaison multiplicative, la proportionnalité simple, la proportionnalité simple composée, la proportionnalité double (cf. annexe 2)

D'un point de vue didactique, cette typologie permet de revisiter la question du moment de l'apprentissage où l'on introduit la division en plaidant pour une approche de celle-ci simultanée avec celle de la multiplication du moment que les problèmes sont choisis de manière pertinente.

Ces typologies de problèmes additifs et multiplicatifs permettent d'aider les enseignants à repérer avec précision, dans les problèmes qu'ils donnent, les objets mathématiques en jeu et leurs relations, d'analyser la complexité de la tâche qu'ils proposent et donc de faire des choix, d'établir des progressions pour conduire les élèves à rencontrer des situations variées, de construire des évaluations en concordance avec les apprentissages effectués.

Finalement, on pourra dire qu'un sujet a construit le sens d'une opération, s'il reconnaît dans n'importe quelle situation relevant du champ conceptuel des structures correspondant à cette opération, la structure spécifique de cette situation et par suite s'il la traite convenablement. Mais la question de savoir comment le sujet va donner du sens à un problème particulier reste posée et c'est sur cette question que nous allons maintenant nous pencher.

II. Le sens d'un problème, représentation et traitement associé

II.1.Qu'est-ce qu'un problème ?

Nous donnerons ici une citation de J. BRUN[6] :
"Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple."

Donner du sens à un problème, ou encore le comprendre, nécessite donc l'articulation de diverses compétences.

---

[6] BRUN Jean, Math-Ecole n° 141.

Comprendre le problème c'est d'une part comprendre que l'énoncé qui est donné relate une certaine situation, souvent issue de la vie réelle pour les problèmes arithmétiques de l'école élémentaire, et que les données qui sont fournies sont déjà des réponses aux questions qu'aurait pu se poser un personnage fictif qui se serait trouver dans la situation évoquée. Mais c'est aussi comprendre que cet énoncé doit conduire à une "action" impliquant une réflexion et des prises de décisions, c'est à dire qu'il ne s'agit pas simplement d'un acte de lecture, mais d'un texte spécifique contenant un projet de réponses à des questions. BROUSSEAU[7] propose ainsi une ingénierie pour l'apprentissage de la soustraction qui, écrit-il, "*a l'ambition de faire passer les questions du domaine de l'enseignant à celui de l'élève, d'enseigner les questions autant que les réponses, et autant que possible d'enseigner les connaissances avec leur sens"*.

Il est donc indispensable que la lecture de l'énoncé évoque une situation qui, si elle n'est pas déjà connue de l'élève, soit susceptible d'être construite mentalement par analogie ou adaptation de situations connues. Ainsi l'élève peut se construire une représentation mentale de la situation évoquée et doit anticiper ce que peuvent être des questions relatives à cette situation. Il peut alors lire certaines données comme des réponses à certaines de ces questions, pendant qu'il constate que d'autres questions ne sont pas traitées par l'énoncé mais sont susceptibles de l'être en agissant sur les données. Sans phase d'anticipation, il est très difficile de "choisir la bonne opération". C'est à partir de cette représentation mentale de la situation et de l'anticipation des questions et des réponses que l'élève peut résoudre le problème et non à partir de la recherche de traits ou d'indices de surface dans le texte ou de proximité temporelle avec des notions en cours d'apprentissage.

II.2. La construction des représentations

Les travaux en psychologie cognitive depuis une vingtaine d'année s'intéressent beaucoup à la question de la construction des représentations chez le sujet, à la fois à des fins de compréhension des phénomènes cognitifs et à des fins d'aide au sujet en cas de dysfonctionnement des mécanismes cognitifs. Le terme de représentation est utilisé ici au sens de représentation ponctuelle et occasionnelle liée à une situation particulière (sinon on parle de connaissances ou de conceptions, ensemble de connaissances et de croyances stables en mémoire à long terme, et de structure cognitive si on s'intéresse à leur organisation).
Ces travaux prennent en compte les connaissances en jeu, les problèmes et leurs caractéristiques propres, ils tentent de décrire l'activité mentale en termes de processus et étudient les représentations.

Pour donner un aperçu de ces travaux, je vais tout d'abord faire référence à J. JULO[8]
Dans la résolution d'un problème l'activité cognitive se développe sur deux versants, l'un relatif à la représentation, l'autre du côté de l'action. Bien évidemment ces deux versants sont étroitement liés.
Plusieurs processus sont en œuvre dans cette construction qui sont naturellement imbriqués et non successifs :

➢ Un processus d'interprétation et de sélection

A partir du contexte sémantique qui est proposé, le sujet opère une sélection des informations qui lui paraissent pertinentes, cette sélection est bien sûr en relation avec ses connaissances antérieures disponibles dans un double mouvement des connaissances disponibles vers les informations et les informations vers les connaissances disponibles déclenchées par la prise en compte des informations..

---

[7] BROUSSEAU Guy (1989) RDM 9/3, La pensée sauvage éditions, p.327

[8] J. JULO, Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, (1995), éditions PUR

➢ Un processus de structuration
Le contenu des représentations n'est pas un ensemble d'entités disjointes. Les représentations sont fortement organisées, leur contenu forme "un tout" qui a son fonctionnement et sa logique propre. La question est de savoir comment s'effectue la structuration de la représentation. Plusieurs facteurs interviennent : le contexte sémantique et les connaissances antérieures qu'il permet de mobiliser, les analogies avec d'autres problèmes qu'il induit (les problèmes précédemment rencontrés sont stockés dans la mémoire et jouent le rôle de "schémas de problèmes" qui font partie des connaissances mobilisées par le sujet lors de sa prise de connaissance de l'énoncé), mais aussi les procédures et les stratégies mises en œuvre progressivement au fur et à mesure des tentatives de résolution.
➢ un processus d'opérationnalisation.
Nous avons vu que la représentation de la situation dans la résolution d'un problème avait pour but de nous permettre d'agir pour atteindre le but proposé.
Le processus d'opérationnalisation est celui qui permet le passage à l'action, qu'il s'agisse d'une action effective (faire un calcul, un schéma...) ou d'une action mentale (faire des déductions, émettre une hypothèse...). Ce passage à l'action résulte de la mise en œuvre de connaissances opératoires issues de notre expérience. Le fait d'agir va avoir en retour, comme nous l'avons déjà suggéré, une influence sur la représentation, notamment sur sa structuration, il permet aussi d'intégrer des éléments nouveaux car en transformant la situation initiale, l'action va transformer le contenu de la représentation, et a aussi sans doute une répercussion sur le contrôle de la pertinence de la représentation eu égard au but à atteindre.
Ce processus d'opérationnalisation se manifeste notamment par le tâtonnement.
La représentation peut être plus ou moins opérationnelle, c'est à dire rendre plus ou moins aisé l'élaboration d'une procédure ou d'une stratégie.

La question du passage de la représentation à l'action n'est pas encore bien connue, mais on peut citer cependant quelque cas où ce passage semble facilité.
Le premier est celui où les connaissances opératoires sont immédiatement mobilisables car il y a reconnaissance par le sujet du type de problème, c'est le cas notamment pour les problèmes faisant l'objet d'un entraînement spécifique.
Le second est celui des problèmes où il est possible d'agir beaucoup, de faire beaucoup d'essais, car alors la représentation initiale s'enrichit et peut se structurer.
Le troisième est le cas le plus fréquent en mathématiques. Il s'agit du cas où les connaissances acquises antérieurement et mobilisables permettent de modéliser la situation et de travailler sur le modèle avec des modes de représentations symboliques plus opérationnelles que le langage : schémas, tableaux, diagrammes, écritures arithmétiques. Le processus de modélisation en effet simplifie la représentation, la rend considérablement plus opérationnelle et permet le contrôle de la pertinence.
En s'appuyant sur l'analyse des processus cognitifs en jeu dans l'activité de résolution de problème, J. JULO propose une modalité d'action didactique pour aider les élèves à enrichir leur représentation du problème et à la rendre opératoire, c'est à dire plus simplement pour aider les élèves à comprendre le problème pour le résoudre, et lutter contre les dysfonctionnements. Cette modalité consiste à enrichir le contexte qui caractérise le problème donné en proposant simultanément plusieurs énoncés de ce problème (même problématique, mêmes valeurs numériques, seul change le contexte sémantique) parmi lesquels l'élève choisit celui qu'il veut résoudre ou qu'il doit tous résoudre. Cette modalité vise l'activité de représentation et n'affecte pratiquement pas le processus de résolution.
Les expérimentations montrent une nette amélioration de la réussite chez tous les élèves, amélioration qui peut s'expliquer par plusieurs facteurs parmi lesquels un moindre poids du

contexte dans la construction de la représentation et de ce fait une possibilité de structuration accrue ainsi qu'une augmentation de la probabilité de mobiliser des schémas de problèmes et des connaissances opératoires.

II.3. Des étapes dans la construction du sens du problème

La construction du sens d'un problème s'appuie sur le passage d'une représentation de la situation à une représentation du problème, c'est à dire une représentation de la situation intégrant le versant action. Les modes de représentation évoluent progressivement.

Pour les problèmes arithmétiques, on peut découper l'évolution en plusieurs grandes étapes ou plutôt plusieurs grands modes car l'évolution n'est pas nécessairement linéaire.

A. Les modes de représentations iconiques, figuratives ou analogiques

➢ Le mode des représentations figuratives non opératoires que l'on rencontre fréquemment au cycle 2 peuvent encore être présent chez certains élèves au cycle 3.
L'enfant perçoit l'histoire avec des personnages, des objets et se construit une sorte de film mais sans percevoir les enjeux numériques. Si on lui demande de représenter par écrit la situation il fait des dessins, mais ceux-ci ne permettent pas de construire une procédure de résolution.

➢ Le mode des représentations figuratives opératoires.
L'enfant reste très dépendant du contexte et de la réalité à laquelle il correspond, mais il peut l'organiser de manière opératoire. Il dessine de manière encore figurative, mais les informations numériques sont prises en compte, le dessin peut donc servir de support à la résolution

➢ Le mode des représentations analogiques
L'enfant reste attaché au contexte, à la représentation des personnages et des objets, mais d'une part il ne conserve que ceux qui sont pertinents pour le problème, d'autre part il ne cherche plus à fixer exactement la réalité il peut simplifier les objets, les symbolisés par des ronds, des croix, des points, ses doigts... et utiliser ces collections analogiques pour résoudre le problème du moins partiellement, avec une procédure vraisemblablement assez "primitive" et de portée très locale.

B. Les modes des représentations symboliques

L'enfant se détache de la représentation iconique pour ne s'intéresser qu'aux rapports entre les objets. Parmi les représentations symboliques, on trouve les modes de représentations schématiques (diagrammes de Venn, des schémas fléchés, tableaux, droite numérique, segments, tableaux de proportionnalité, etc.). Ces schémas sont un moyen d'identifier plus clairement des objets mathématiques décisifs pour la conceptualisation. C'est un mode plus abstrait et plus riche sur le plan opératoire.
On trouve enfin les écritures arithmétiques qui sont des représentations symboliques particulières. Traduire un énoncé de problème par une écriture numérique (de type équation pour les problèmes arithmétiques) est un mode expert de représentation qui permet d'apporter la réponse demandée à moindre coût. Ce mode suppose l'assimilation des modes précédents, il traduit ce que l'on appelle couramment l'acquisition du sens du problème.
Ces représentations symboliques ont un rôle que l'on pourrait désigner de "spiralaire" : elles s'appuient sur les catégorisations primitives de diverses situations connues déjà en place, tout

en développant chez l'élève des compétences à catégoriser les nouvelles situations qu'il rencontre, et ainsi affiner les premières catégories qui servent à nouveau d'appui pour enrichir les diverses classes de situations.

A chacun de ces modes, est associé un mode de représentation langagière dont la fonction est multiple : aide à la désignation permettant l'identification des éléments de la situation et de leurs relations, aide à l'anticipation des effets et des buts, aide à la pensée, au raisonnement et à l'inférence, aide à l'organisation de l'action, planification et contrôle.

II.4. De la représentation de la situation à la mise en œuvre de procédures de résolution

A. DESCAVES[9] insiste sur le fait que construire la représentation du problème et calculer sa solution sont deux phases de la résolution qui sont en interaction, mais qui ne mettent pas en œuvre les mêmes processus mentaux, processus de catégorisation pour la construction de la représentation, processus calculatoires dans le second cas. Il fait l'hypothèse que certains registres sémiotiques (schémas, écritures algébriques) fonctionnent comme des interfaces et peuvent être interprétés comme modélisation de la situation puis comme support permettant des transformations symboliques des problèmes.

Donnons deux exemples analysés par A. DESCAVES pour illustrer ce propos suivant que la représentation iconique de la situation est ou n'est pas en concordance avec l'écriture arithmétique traduisant la solution. Il s'agit du problème de Paul qui disposait de 105F et en dépensait 99, et de celui de Marie qui après avoir dépensé 150F avait encore 200F.
Le problème de Paul est un cas de concordance, en effet, l'écriture arithmétique représentant le problème est identique à celle donnant la solution : 105-99 = ?
Le calcul effectif de la solution dépend bien sûr des connaissances mobilisables par les élèves, et les procédures peuvent être très nombreuses et variées, elles peuvent être fondées sur
- le rapport de concordance avec la représentation mentale iconique (figurative ou analogique)
- la transformation préalable de la représentation iconique (réciprocité des transformations : ce que Paul a maintenant, ajouté à ce qu'il a dépensé c'est 105F donc 99+ ? = 105)
- un basculement de signification dans le système arithmétique de traitement (chercher a-b ⇔ trouver ce qu'il faut ajouter à b pour obtenir a)
- un système de basculement dans le système de représentation arithmétique (retrait ⇔ différence, donc pour calculer la différence 105-99 on peut calculer la différence 106-100)
- l'effectuation d'une technique opératoire.
- des transformations opérant sur la représentation arithmétique du problème et sur des connaissances en numération (-99 ⇔ -100+1)

Le problème de Marie est un cas de discordance puisque la représentation iconique est celle d'une diminution et de ce fait une écriture arithmétique traduisant l'énoncé est du type ? -150 = 200 tandis que l'écriture arithmétique experte représentant la solution est 200+150= ?.
Ici la discordance implique donc nécessairement des basculements et les procédures peuvent être fondées sur divers types de basculements :
- une transformation préalable opérant sur la représentation iconique de la situation (qu'aurait conservé Marie si elle n'était pas allée faire ses courses ?)
- le traitement opérant sur une représentation schématique du problème par exemple :

---

[9]A. DESCAVES. Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège in Actes du 26 ième Colloque de la CORIRELEM, LIMOGES, 1999, IREM du LIMOUSIN.

* utilisation de la réversibilité des transformations -150, +105 dans le cas d'un schéma fléché du type

$$? \xrightarrow{-150} 200$$

* utilisation de la droite numérique
* utilisation de segments mis bout à bout représentant respectivement la dépense et ce qui reste, etc.

- la reconnaissance d'une situation additive et tâtonnement contrôlé, etc.

A partir de ses travaux A. DESCAVES propose une aide au passage de la représentation à l'élaboration d'une procédure de calcul par une démarche algébrisante. Dès lors que la construction de la procédure de calcul nécessite un basculement de signification dans le système de représentation ou dans celui de traitement arithmétique, A. DESCAVES fait l'hypothèse que le fait de pouvoir nommer l'inconnue est une aide à la fois à la compréhension du problème et à son traitement. De plus l'introduction et l'utilisation d'écritures mathématiques peut avoir, d'après lui, un rôle déterminant comme aide à la catégorisation des problèmes. Ainsi dès le CE2, il introduit une représentation en tableau

10	
6	4

comme support à automatisation de certaines relations numériques qui permet de penser une cohérence quasi formelle entre les trois écritures :
6+4 = 10, 10-4 = 6 et 10-6 = 4
Plusieurs problèmes sont alors donnés ainsi que plusieurs écritures mathématiques, les élèves doivent relier chaque problème aux écritures qui les traduisent, (un problème, plusieurs écritures possibles) puis ils doivent associer chaque problème à l'un des deux tableaux qui lui correspond ce qui conduit à catégoriser les problèmes.

Par ailleurs, si l'on fait l'hypothèse que la modélisation permet une amélioration dans le traitement du problème, la question se pose de savoir s'il serait judicieux de proposer aux élèves un apprentissage de la schématisation. A. BRONNER et l'équipe de recherche ERES de MONTPELLIER conduisent actuellement une étude sur cette question en s'appuyant sur les hypothèses suivantes :
- Les schémas jouent un rôle de représentations intermédiaires entre le langage naturel et le symbolisme mathématique.
- Les schémas ne sont ni nécessaires ni indispensables à une bonne réussite de la résolution de problème, cependant ils constituent une aide efficace à la représentation et à la résolution de problèmes standards difficiles ou de problèmes complexes que l'enseignant pourrait difficilement donner à un niveau donné
- Pour être efficace, la schématisation suppose un enseignement où les schémas sont intégrés comme outil d'aide à part entière à côté des outils mathématiques, où la place et le statut doivent être pensés dans la progression d'apprentissage et les situations proposées.

Les premiers résultats semblent montrer que si les élèves qui parvenaient à résoudre les problèmes sans utiliser les schémas ne les utilisent toujours pas dans la résolution de nouveaux problèmes après enseignement spécifique de la schématisation, parmi ceux qui ne parvenaient pas à élaborer de procédures de résolution avant l'enseignement, un certain nombre s'approprie cette procédure avec succès.

Dans la Théorie des Situations G. BROUSSEAU[10] fait l'hypothèse que "*le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont dévolues"* et il admet aussi qu' "*il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct"*. Il précise que *"dans certains cas il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu qui lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance [...]"*. Prenant l'exemple de l'enseignement de la soustraction G. BROUSSEAU[11], propose une situation fondamentale qui d'après lui permet à la fois de construire le sens de la soustraction et les procédures de résolution, il s'agit du "jeu de la boite". Pour décrire cette situation qui se déroule sur 17 séances, G.BROUSSEAU commence par insister sur la nécessité de dévoluer aux élèves non seulement le problème mais aussi la question et montre comment aménager des phases adidactiques dans la situation didactique élaborée par le maître de manière à rendre l'élève responsable de la connaissance à acquérir. L'articulation du sens et de la technique est traitée par la prise en compte des procédures empiriques mises en œuvre par les élèves lors des phases d'action, leur évolution sur un temps long grâce à un jeu sur les variables de commande à disposition du maître, et l'institutionnalisation d'une technique officielle lorsqu'un travail important a été effectué sur la question.
Ici le point de vue de R. DOUADY sur la dialectique outil objet apporte un éclairage intéressant pour comprendre le passage des procédures de calcul empiriques outils de résolution à la mise en place de procédures expertes de calcul réfléchi ou algorithmisé, objet de savoir.

Nous pouvons mentionner aussi ici le point de vue développé par R.BRISSIAUD pour aider les élèves à mettre en place des procédures de calcul expertes. R. BRISSIAUD s'attache davantage aux relations de concordance ou de discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Il considère qu'il s'agit là d'un phénomène qui permet de préciser les enjeux de la conceptualisation arithmétique et d'élaborer des situations d'apprentissage. R. BRISSIAUD dit qu'il y a concordance dans un énoncé tel que "Jean a 105F il dépense 6F, combien a-t-il maintenant ?" car le résultat de l'opération 105-6 peut être déterminé par un compte à rebours de manière économique donc sans procédure de calcul de soustraction. De même le problème "un enfant achète 3 chocolats à 50F l'un, quel est le prix ?" est un cas de concordance car 3x50 peut se calculer de manière économique par 50+50+50 tandis qu'il y a discordance dans les cas suivants "Jean a 105F, il en dépense 67, combien a-t-il maintenant ?" ou "un enfant achète 50 chocolats à 3F l'un, quel est le prix ?" parce ce que la procédure de calcul experte est économique par rapport aux procédures empiriques. R. BRISSIAUD fait alors l'hypothèse que pour l'apprentissage, la première rencontre avec une opération doit être une situation de discordance et qu'il convient donc d'enseigner la procédure experte dans les cas de discordance. On pourrait penser a contrario que c'est justement le jeu sur les variables numériques qui va permettre une évolution des procédures empiriques vers des procédures plus élaborées voire expertes sans perte de sens, et que l'utilisation par l'élève d'une procédure experte dans un cas de discordance pourrait être un signe de la compréhension de certaines propriétés de l'opération.
Par ailleurs, le sens d'un problème n'est pas le sens d'un concept, inférer la construction du sens sur la première rencontre est peut-être très réducteur de la manière dont peut se construire le sens du concept. Ces questions restent encore à étudier.

---

[10] G. BROUSSEAU. Théorie des situations didactiques. (1998) p 73. La pensée sauvage, éditions.
[11] G. BROUSSEAU. (1989) "Le contrat didactique, le milieu" in RDM 9.3.

Les recherches de D. BUTLEN et M. PEZARD[12] établissent l'impact d'une pratique régulière du calcul mental sur les compétences des élèves en résolution de problèmes arithmétiques. En effet si le calcul mental apporte naturellement une meilleure maîtrise des calculs et intervient comme outil de prévision ou de contrôle, il ouvre parallèlement un espace de liberté dans la recherche du modèle en permettant une certaine prise de distance par rapport aux données numériques et une exploitation plus aisée des relations entre ces données Ils concluent :"l'apport du calcul mental relève de l'heuristique dans la mesure où il aide l'élève à acquérir des stratégies de résolution de problèmes numériques".

Finalement trois types de tâches améliorent de manière significative la résolution de problèmes arithmétiques pour beaucoup d'élèves
- l'entraînement régulier à l'utilisation de différents procédés de calcul fondés sur différentes significations des opérations
- l'acquisition d'automatismes dans la production de relations numériques
- l'entraînement à l'explicitation du choix des opérations, des procédures de calcul employées lors de la résolution, ceci dans différents registres d'écritures.

II.5. Le rôle de l'enseignant

D'un point de vue pratique, la tâche impartie à l'enseignant consistant à choisir ou à construire des classes de problèmes pour permettre aux élèves de construire un concept tel qu'une opération arithmétique est très complexe. Pour tenter de la mener à bien, il importe que l'enseignant prenne en compte un certain nombre de paramètres sur lesquels il pourra jouer. Certains d'eux ont fait ici l'objet d'une étude approfondie, tandis que d'autres ont été seulement évoqués. C'est, nous semble-t-il, la structure du problème qui est le paramètre fondamental. L'analyse de cette structure, le repérage de la sous catégorie dans la structure concernée fonction de l'élément qui est à chercher permet de repérer avec précision les connaissances en jeu, d'envisager a priori les procédures des élèves et de préparer d'éventuelles aides en conséquences. Cette analyse permet de construire une progression à moyen et long terme dans le but de couvrir le plus possible le champ de problèmes envisageables et donc d'approcher le concept sous ses multiples aspects. Elle conduit enfin à proposer des évaluations en accord avec le travail déjà effectué avec les élèves.
Les valeurs numériques sont un second paramètre fondamental car c'est en les faisant varier que l'enseignant va d'une part adapter le problème à ses élèves et d'autre part faire évoluer leurs procédures de résolution. L'enseignant peut jouer sur leur nature (entiers, décimaux, fractions, sur leurs caractéristiques arithmétiques (parité, diviseurs premiers, relations avec la base de numération, etc.), sur leur taille et leur taille relative, sur la nature des grandeurs qu'elles représentent. Naturellement une analyse du texte de problème en tant qu'écrit est fondamentale : les caractéristiques linguistiques de l'énoncé (vocabulaire, présence d'opérateurs sémantiques, syntaxe, ponctuation), son organisation (isomorphie ou non isomorphie entre la structure temporelle de l'énoncé et celle de la situation évoquée), la place de la question ont une incidence majeure sur la construction de la représentation du problème par l'élève. Enfin, le choix des contextes plus ou moins liés aux domaines d'expériences des élèves peut faciliter ou au contraire entraver cette construction.

[12] BUTLEN D., PEZARD M. (2000) Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, *Revue Repères Inter-IREM,* Paris, France, pp.5-24

Conclusion

L'apport de la théorie des champs conceptuels associé à une réflexion sur l'organisation didactique de la situation prenant en compte à la fois les fonctions épistémologiques des concepts, la signification sociale des domaines d'expérience auxquels ils font référence, les jeux entre les acteurs de la situation didactique et donc le contrat, est fondamental pour conduire les élèves à construire le sens des "opérations" en leur proposant des problèmes couvrant tant que faire se peut une grande variété de catégories. Nous souhaitons insister sur l'imbrication très forte entre l'acquisition du sens d'un problème et les procédures de résolution que les élèves mettent en œuvre puisque nous avons vu que les tentatives de résolution ont une influence sur la représentation du problème, et donc que des procédures mêmes archaïques contribuent à la construction du sens. Insistons également sur la nécessité pour le professeur de jouer sur les variables des situations pour faire évoluer les techniques empiriques vers des techniques plus expertes de calcul réfléchi ou algorithmisé. La question du poids respectif du travail sur le sens et de celui sur l'acquisition de techniques est bien sûr posée. Mais le sens et le fonctionnement automatique des connaissances ne s'opposent pas, au contraire il est indispensable d'avoir un fonctionnement automatique sur certains points pour libérer de la place en mémoire de travail et aborder des objets nouveaux. Lorsque l'enseignant décide de mettre de l'ordre dans ces diverses techniques et passe à une phase d'institutionnalisation d'une technique conventionnelle officielle, il est encore possible de revenir au sens en s'interrogeant sur les mécanismes mis en œuvre dans la technique et sur leur justification mathématique, et le fonctionnement automatique auquel on parvient en fin d'apprentissage nécessite lui aussi la mise en place de moyens de contrôle qui s'appuient sur le sens.

Finalement on ne sera pratiquement assuré qu'un élève dispose d'un concept mathématique avec suffisamment de sens que s'il est capable de le mobiliser, sans aide, dans des situations assez complexes où ce dernier est en en jeu, et d'utiliser les différents théorèmes associés. Ceci nécessite que l'élève ait eu suffisamment souvent l'occasion de devoir agir sous sa propre responsabilité sur ce type de problème et qu'il ait eu à se poser des questions fondamentales en rapport avec le sens du concept. C’est sur le long terme bien sûr qu’un tel apprentissage peut se construire.

Annexe 1
Typologie de G VERGNAUD[13] relative aux structures additives

A l'école élémentaire les problèmes additifs relèvent essentiellement des trois premières structures :

- La composition de deux mesures.

Dans cette famille on trouve essentiellement des problèmes de réunions ou de fractionnement de collections ou de grandeurs mesurables. Suivant que l'on cherche le tout ou l'une des parties, l'opération experte associée est une addition ou une soustraction.

- La relation de transformation d'états.

Il s'agit d'énoncés qui décrivent des situations se déroulant souvent dans le temps, dans lesquelles on peut identifier un état initial, une transformation (positive ou négative) opérant sur cet état pour conduire à un état final. Cette structure permet de définir six catégories de problèmes suivant que la transformation est positive ou négative et que la recherche porte sur l'état final, la transformation ou l'état initial.

- La relation de comparaison additive.

Deux états relatifs à des grandeurs mesurables ou repérables sont comparés de manière additive, l'un joue le rôle de référent pour l'autre. La relation s'exprime par les locutions "de plus", "de moins". Dans cette famille on trouve également six sous catégories suivant que la relation est positive ou négative et que la question porte sur la recherche du référé, de la comparaison ou du référent.

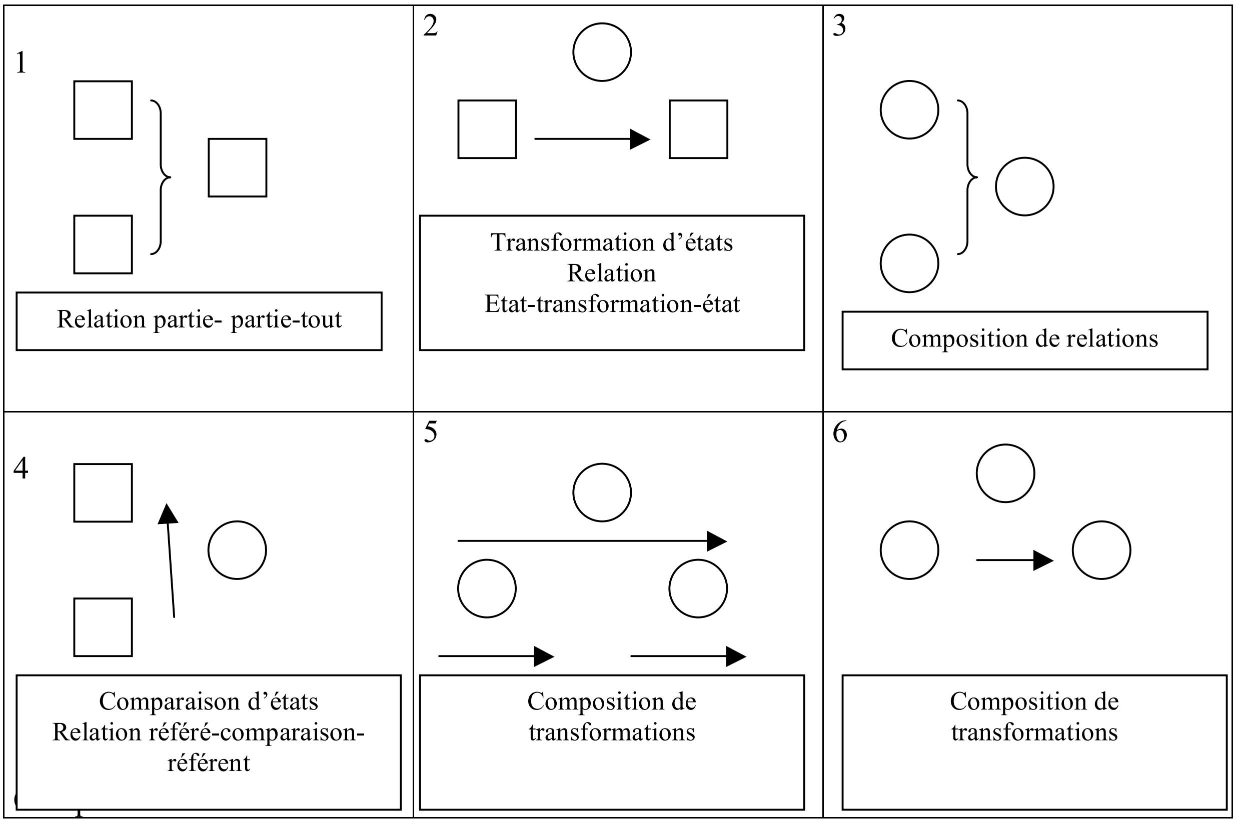
Parmi les autres structures on trouve :
- Les compositions de transformations

Deux transformations ou plus sont appliquées successivement à des états qui ne sont pas connus (sinon on revient à la famille "relation de transformation"). La transformation unique composée de ces transformations, permet de transformer l'état initial à l'état final obtenu après l'application de toutes les transformations concernées.
Dans cette famille, le nombre de sous catégories dépend bien sûr du nombre de transformations composées, dans le cas de deux, on peut définir douze sous catégories suivant que les transformations composées sont de même signe (2 cas), de signes opposés (2 cas suivant que la composée est positive ou négative) et que la question porte sur la détermination de la composée ou de l'une des deux transformations (3 cas).
- Les compositions de relations
- Les comparaisons de transformations

Ces deux derniers cas peuvent être décrits de manière analogue aux précédents, ils ne concernent pratiquement aucun problème posé à l'école élémentaire.

[13] Ce tableau est extrait de l'ouvrage Le moniteur de mathématiques, Résolution de problèmes, sous la direction de G. VERGNAUD. Editions NATHAN, (1997) p. 16.

Tableaux des relations additives



Quelques exemples de problèmes additifs

Mathilde a dépensé 149F en achetant une cassette à 68F et un livre. Quel est le prix du livre ?	Composition de deux mesures. On connaît une mesure et la composée, on cherche l'autre.
Dans la salle il y a 42 tables et 27 chaises. Combien faut-il apporter de chaises pour qu'il y ait une chaise par table ?	Transformation d'états. On cherche la transformation portant sur l'état initial 27, pour obtenir l'état final 42, défini par le cardinal d'une collection de référence (les tables)[14].
Kevin a 145 timbres dans sa collection. Victor en a 20 de plus. Combien de timbres a Victor ?	Comparaison positive entre deux états. On cherche l'état référé
Aujourd'hui il fait 15° à Paris soit 12° de moins qu'à Nice qu'elle est la température à Nice ?	Comparaison négative entre deux états, on cherche l'état référent.
A un stand de la foire, Laura a tenté sa chance deux fois de suite. La première fois elle a perdu 17 points. En tout elle a gagné 50 points. Que s'est-il passé la seconde fois ?	Composition de deux transformations, on connaît la première transformation (négative) et la composée (positive), on cherche la seconde.

[14] R. Brissiaud fait une catégorie particulière pour ce type de problèmes qu'il désigne par problèmes d'égalisation. Pour notre part, nous considérons qu'il s'agit d'un cas particulier de problème de transformation.

Annexe 2

Typologie de G. VERGNAUD relative aux structures multiplicatives

- La comparaison multiplicative de grandeurs

Dans cette catégorie, on trouve les problèmes mettant en jeu une seule grandeur (mesurable ou repérable) et deux états relatifs à cette grandeur, objets de la comparaison multiplicative, l'un jouant le rôle de référent pour l'autre. La relation numérique de comparaison est donc une relation de nature scalaire (sans dimension) s'exprimant par les expressions "fois plus", "fois moins" dont on sait qu'elles sont difficiles à comprendre du fait de la juxtaposition d'un terme renvoyant au domaine multiplicatif et d'un terme relevant du domaine additif.
Six sous catégories peuvent être envisagées suivant que la relation multiplicative est définie par un coefficient supérieur ou inférieur à 1 et que la question porte sur la recherche du référé, de la comparaison ou du référent.

- La proportionnalité simple

Les situations correspondantes peuvent être représentées par des tableaux de nombres, et sont associés à une fonction linéaire (fonction "multiplier par" ou "diviser par"), elles conduisent à faire soit une multiplication, soit une division partition, soit une division quotition, soit une "règle de trois", c'est à dire la recherche d'une quatrième proportionnelle.
Dans ces problèmes il y a donc deux domaines de grandeurs en jeu, et une relation fonctionnelle multiplicative entre ces deux domaines de grandeurs. Il est fréquent que les problèmes de cette catégorie semblent ne faire intervenir que deux nombres, en fait intervient également l'unité, mais souvent non explicitement sous forme de nombre ("Quel est le prix de huit croissants à 4 F l'un ?").
Pour résoudre ces problèmes, le raisonnement peut porter sur le coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs, il peut également porter sur les propriétés de linéarité de la fonction linéaire[15] associée : produit par un scalaire ou propriété d'additivité.

- La proportionnalité simple composée

Dans ces problèmes trois grandeurs sont en jeu, deux relations de proportionnalité simple sont définies, la situation conduit à composer ces deux relations de proportionnalité.
Ce cas conduit à de nombreux problèmes suivant les éléments donnés et les éléments à chercher.

- La proportionnalité double (ou multiple)

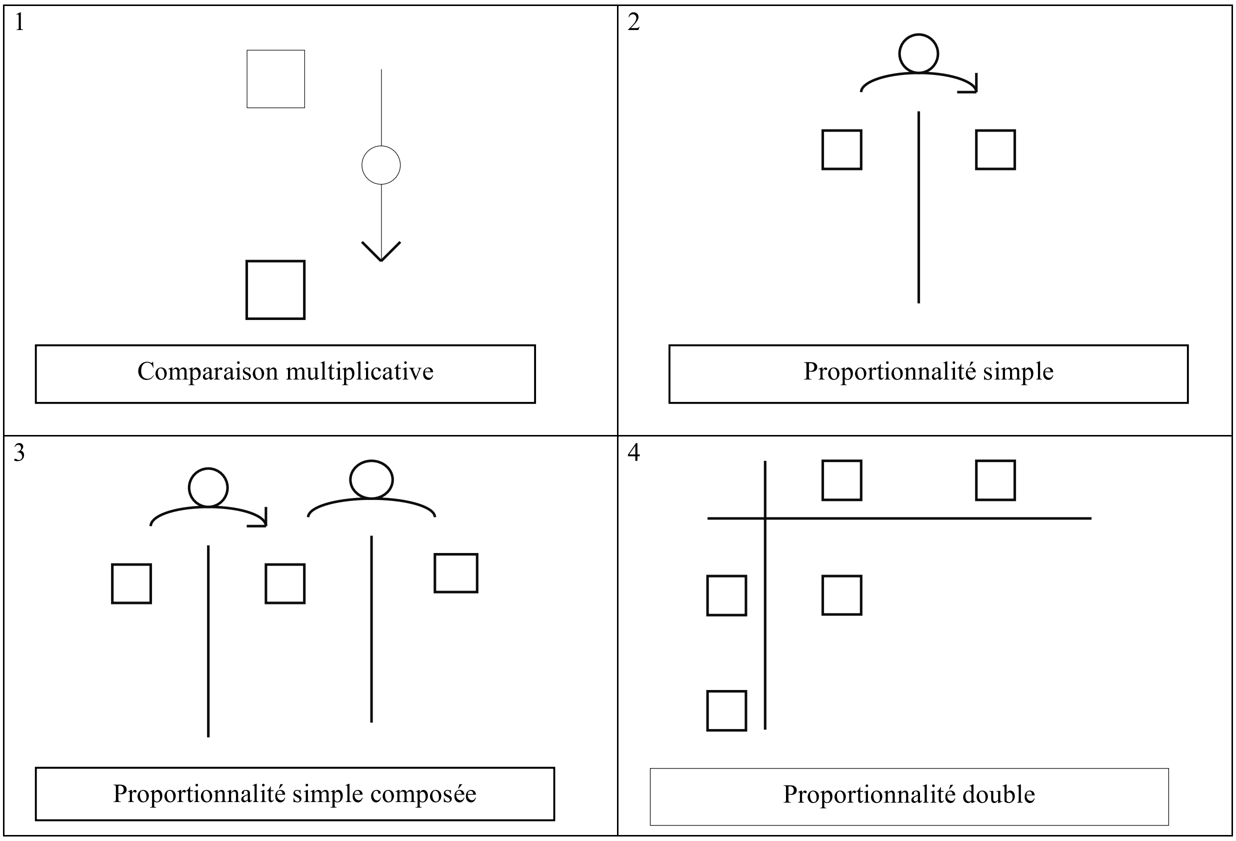
Les problèmes de proportionnalité double (ou multiple) sont des problèmes mettant en jeu deux domaines de grandeurs (ou plus) qui sont indépendants (aucune relation fonctionnelle ne les lie) et tels qu'une relation associe à un couple (ou un n-uplet) de mesures de la chaque grandeur, une troisième (ou n+1ème) grandeur appelée grandeur produit.
Il est donc fondamental de déterminer l'image du couple (ou du n-uplet) des unités des deux (ou n) grandeurs, cette image peut être l'unité de la grandeur produit ou une autre grandeur.
Les grandeurs peuvent être discrètes ou continues

---

[15] Une fonction linéaire f de R dans R est une fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre ax, obtenu en multipliant le nombre x par le coefficient a appelé coefficient de la fonction linéaire (il correspond au coefficient de proportionnalité).
On appelle propriétés de linéarité les deux propriétés suivantes qui sont caractéristiques des fonctions linéaires :
Pour tout couple (x,y) de nombres réels, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
Pour tout réel x, et pour tout scalaire réel λ, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Le cas particulier de la recherche de la relation entre cardinal du produit cartésien[16] de deux ensembles finis et le cardinal de chacun d'eux, correspond à des grandeurs discrètes pour lesquelles l'image du couple (1,1) égale à 1. Relèvent donc de cette catégorie les problèmes de nombre de carreaux d'un quadrillage rectangulaire et d'une manière générale les problèmes qui correspondent à une composition multiplicative de deux grandeurs discrètes.
La relation entre la mesure de l'aire d'un rectangle et celle des longueurs de ses côtés relève également de ce cas. Ici les grandeurs sont continues et l'image du couple (1,1) est encore 1 et donc celui du couple (x,y) est xy.
Dans le cas général, si l'image du couple (1,1) est le nombre réel α, l'image du couple (x,y) est αxy.

Tableaux des relations multiplicatives



Exemples de problèmes multiplicatifs

Un cycliste court sur une piste de 350m, il fait 2 tours de piste par minute, il roule 25 min. Quelle distance parcourt-il?	Proportionnalité simple composée
Pour transporter 840 œufs, un grossiste utilise 7 cartons dans lesquels il peut placer des plateaux de 24 oeufs. Combien de plateaux a-t-il mis dans chaque carton ?	Proportionnalité simple composée

[16] Le produit cartésien de deux ensembles est l'ensemble de tous les couples possibles dont la première coordonnée est un élément du premier ensemble et la seconde coordonnée un élément du deuxième ensemble.

Un restaurant passe une commande s'élevant à 540F pour des bouteilles d'eau minérale à 3F la bouteille, les bouteilles sont conditionnées par 12. Combien de packs ont-ils été livrés ?	Proportionnalité simple composée.
"Pour déguiser un clown, on dispose de 5 chapeaux et de 12 vestes, de combien de manières différentes peut-on déguiser le clown ?"	cas particulier de proportionnalité double recherche du cardinal d'un produit cartésien, l'image du couple (1,1) est 1.
"Un rectangle quadrillé est composé de 48 carreaux, sur sa longueur il y a 8 carreaux, Combien de carreaux y a-t-il sur sa largeur ?"	cas particulier de proportionnalité double recherche du cardinal d'un produit cartésien, l'image du couple (1,1) est 1.
La pension à l'hôtel des dunes est de 250F par personne et par jour. Combien un groupe de 5 personnes paiera-t-il pour 17 jours ?	proportionnalité double, l'image du couple (1,1) est 250
"Un terrain rectangulaire mesure 120m de long et 47 m de large. Quelle est son aire ?"	Cas particulier de proportionnalité double : recherche du produit de deux mesures, l'image du couple (1,1) est 1.
"Pour arroser les arbres de son verger, un producteur de fruits a utilisé 560 litres d'eau en 7 jours. Il faut 8 litres d'eau par arbre et par jour. Combien y a-t-il d'arbres dans le verger ?"	Proportionnalité double, l'image du couple (1,1) est 8.
Dans une boite de chocolats, il y a 6 chocolats noirs et 3 fois plus de chocolats au lait. Combien y a-t-il de chocolat au lait ?	Comparaison multiplicative
Dans le groupe A, il y a 15 enfants, c'est trois fois moins que dans le groupe B. Combien y a-t-il d'enfants dans le groupe B?	Comparaison multiplicative
Jean en a 54 billes, Pierre a 18 billes, c'est combien de fois moins que Jean ?	Comparaison multiplicative
Un objet coûte 18F au super marché et 27 F à la boutique du village, c'est combien de fois plus qu'au supermarché ?	Comparaison multiplicative.

Annexe 3
Références bibliographiques

ARTIGUE M. (1984), Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques, Thèse de doctorat d'Etat, PARIS VII.
BRISSIAUD R. (1998), Le progrès en arithmétique : continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne. L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes : quatre attitudes pédagogiques. Livre du maître du manuel scolaire " j'apprends les maths " CM1, pp4-27. Ed. Retz. Paris.
BROUSSEAU G. (1989), RDM 9/3, La pensée sauvage éditions, p.327. Grenoble.
BROUSSEAU G. (1998), Théorie des situations didactiques. p 73. La pensée sauvage, éditions, Grenoble
BRUN J. Math-Ecole n° 141. Neufchatel.
BUTLEN D., PEZARD M. (2000) Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, *Revue Repères Inter-IREM,* Paris, pp.5-24.
DESCAVES A. (1999), Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège in Actes du 26ème Colloque de la CORIRELEM, LIMOGES, IREM du LIMOUSIN.
Descaves A. (2001), L'apprentissage du sens, certes ! Mais dans quel sens prendre le sens. In Actes du 28ème Colloque de la COPIRELEM, TOURS, Ed. PUO, Orléans
DOUADY R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. RDM 7.2, La pensée sauvage, éditions. Grenoble
FABRE M. (1999), Situations problèmes et apprentissages scolaires. Ed PUF, Paris.
JULO J. (1995), Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, éditions PUR
VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, RDM 10.2.3. La pensée sauvage, éditions, Grenoble
VERGNAUD G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la limite des concepts de schème et de champ conceptuel, Vingt ans de Didactique des mathématiques en France, sous la direction de M. Artigue. La pensée sauvage, éditions, Grenoble