

"Le napperon" **Un problème pour travailler sur la symétrie axiale.**

M-L. PELTIER Maître de conférences en mathématiques à l'IUFM de ROUEN

Introduction

Les instructions officielles de l'école primaire mettent l'accent sur le rôle de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Mais si dans le domaine numérique les professeurs se sentent généralement à même de construire ou de choisir des problèmes permettant aux élèves de développer une réelle activité intellectuelle et de construire certaines connaissances, il leur est souvent plus difficile d'envisager en géométrie une activité qui puisse être un "problème" pour les élèves. Pour nombreux d'entre eux, les problèmes en géométrie sont liés à la notion de démonstration, et relèvent donc du collège. L'enseignement de la géométrie à l'école leur paraît souvent proche de la "leçon de chose", c'est à dire une succession de séances où il s'agit d'introduire du vocabulaire, de donner quelques définitions, de faire "manipuler" les élèves.

Je vais présenter ici une situation en géométrie qui, d'après moi, fait intervenir la notion de symétrie axiale comme réponse à un problème, et qui permet de mettre en avant :

- le rôle de l'anticipation : il est nécessaire de faire des hypothèses, d'anticiper l'action, avant de l'exécuter ;
- le rôle de la manipulation : ici la manipulation est support pour l'anticipation.

Dans l'analyse didactique de la séance, la réflexion porte aussi sur le rôle de l'erreur dans la situation (les erreurs produites constituent des aides à la réflexion, et l'élève peut les dépasser en s'appuyant sur elles), et sur la validation qui est en grande partie à la charge de l'élève.

Description de l'activité

Les élèves doivent reproduire un "napperon" en papier qui est affiché au tableau. Il est précisé que ce napperon doit être réalisé en pliant une feuille de papier et en découpant tout ce que l'on souhaite, puis de déplier et de comparer avec le modèle.

Cette situation peut être proposée à différents niveaux de classe en fonction du modèle choisi pour le "napperon".

1. Analyse préalable

1.1. Les variables de la situation

Le choix des découpes du napperon est très important. En fonction de ce choix, la réflexion pourra être centrée

- sur les positions relatives des différentes découpes et sur des questions d'orientation
- sur la forme des découpes : celles-ci peuvent être choisies de telle sorte que l'exécutant utilise implicitement des "théorèmes en acte"¹ relatifs à l'existence d'axe(s) de symétrie dans certaines figures pour obtenir le résultat souhaité. Par exemple pour obtenir une découpe ayant la forme d'un triangle isocèle, on coupe perpendiculairement au pli, ce qui revient à appliquer la propriété suivante "dans un triangle isocèle l'axe de symétrie est également hauteur".

Le nombre d'axes de symétrie du napperon est également une variable à étudier en fonction de la classe dans laquelle on souhaite proposer la situation :

- Un seul axe rend la tâche assez aisée pour être proposée au cycle 2 (exemple 1)
- Le choix de deux axes, intéressant dans la mesure où le degré de complexité est raisonnable et le temps est assez facile à gérer, convient bien en début de cycle 3 (exemples 2 et 3)
- Le cas de 4 axes, également intéressant, peut être choisi en fin de cycle 3 pour travailler sur les axes de symétrie des polygones usuels. (exemples 4, 5, 6, 7).
- Celui de 6 axes (exemple 8) nécessite un pliage en trois qui permet de proposer la situation à des élèves de sixième.

¹ Notion empruntée à G. VERGNAUD

Le fait de laisser ou non apparents les plis du modèle, d'introduire des plis parasites, ou de les supprimer complètement peut avoir une incidence sur les stratégies des élèves dans la mesure où ils sont ou non des indices pertinents ou non à prendre en compte.

Une photocopie du modèle pour chaque élève est souhaitable de manière à permettre une analyse individuelle précise, mais dans une dimension différente de celle des feuilles qui seront distribuées pour être découpées pour éviter le recours au décalquage des découpes sur le modèle.

1.2. Les critères de conformité au modèle

Les réalisations des élèves seront considérées comme conformes au modèle lorsque les éléments suivants auront été respectés :

- le nombre de pliage
- le nombre de découpes
- la forme² des découpes
- les positions relatives des différentes découpes
- l'orientation des découpes.

1.3. Les procédures envisageables

- Identification du nombre d'axes de symétrie et réalisation des pliages associés, repérage des éléments à découper,
- Pliage en deux quel que soit le nombre d'axes de symétrie et reproduction des découpes sur ce pliage en deux,
- Pliage en deux ou en quatre puis reproduction par découpage sur le papier ainsi plié de toutes les découpes du modèle complet,
- Pliage en deux ou en quatre , découpages de certaines parties, dépliage et rectification sur la feuille dépliée.

1.4. La validation

La validation se fait par confrontation visuelle au modèle. Bien évidemment les réalisations obtenues ne sont pas superposables au modèle. Ce qui doit être respecté, comme il a été indiqué ci-dessus, ce sont les formes géométriques des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

Il est nécessaire de proposer des modèles tels que les enfants puissent décider tout seuls s'ils ont ou non réussi, il est donc important que les erreurs éventuelles soient visibles et pour cela il importe de choisir des napperons avec des découpes de formes différentes et en nombre différent sur chacun des axes et sur deux côtés consécutifs du carré.

En cycle 2, la forme des découpes doit être simple : quadrilatères quelconques, découpes arrondies etc. En cycle 3 il sera intéressant de proposer des découpes qui permettent de travailler l'existence d'axes de symétrie pour les polygones usuels.

1.5. La prise en compte des essais et des erreurs

Les essais erronés sont intéressants à conserver. Ils ont plusieurs fonctions.

- La première, tout à fait fondamentale, est de permettre à son auteur de mener une réflexion et une analyse fine des effets d'un découpage sur un papier plié en 2, en 4, ou en 6. L'erreur peut alors être un point de départ pour affiner la réflexion : en analysant l'effet de telle découpe sur le papier déplié, l'élève fera des hypothèses sur les modifications à effectuer pour obtenir le résultat souhaité³. L'erreur acquiert ainsi un statut positif, voisin du statut qu'elle a dans la recherche.
- Une seconde fonction provient du fait que chaque réalisation, ayant été obtenue, par pliage admettra au moins un axe de symétrie. Il sera donc possible dans la seconde partie de travail de mettre en évidence les axes de symétrie des différents napperons, de faire des constats sur le motif minimum à conserver dans chaque cas pour obtenir le napperon complet en appliquant à ce motif les symétries axiales mises en évidence.

1.6. La synthèse et l'institutionnalisation

La synthèse portera à la fois sur les aspects méthodologiques et notionnels, elle sera bien sûr fonction du niveau de la classe et du modèle de napperon choisi.

- Les différentes méthodes mises en œuvre pour réussir seront rappelées.

² La notion de forme d'une découpe est délicate. Les exigences quant à la forme des découpes ne seront pas les mêmes suivant les niveaux de classe. Au cycle 2, c'est l'aspect global qui doit être respecté : découpes arrondies ou polygonales, et dans ce dernier cas, nombre de côtés du polygone. Au cycle 3, c'est la forme au sens euclidien qui devra être conservée, ainsi par exemple les quadrilatères et les triangles particuliers devront être reproduits comme tels, les alignements devront être respectés, c'est la raison pour laquelle il est souhaitable que les élèves disposent d'un modèle individuel pour pouvoir l'analyser..

³ Ainsi par exemple, si un élève effectue une découpe en forme de demi cercle sur un bord du papier plié en quatre au lieu de l'effectuer sur un pli, il constate en ouvrant qu'il n'obtient pas les cercles souhaités mais des demi cercles sur les bords du napperon. Lors de l'essai suivant l'élève prend en compte la position du cercle à découper par rapport au pli effectué donc à l'axe de symétrie concerné.

- Les notions suivantes seront dégagées :
 - la notion d'axe(s) de symétrie d'une figure plane (cycle 2 et 3)
 - les axes de symétrie de figures usuelles (triangles, isocèles, losange, rectangle, orthogone, carré, demi cercle, cercle etc. (cycle 3).
 - La notion de centre de symétrie dans le cas d'un nombre pair d'axes de symétrie (collège).

1.7. Prévision du déroulement et du matériel nécessaire

Pour l'entrée dans l'activité, il est important de prévoir une courte phase de manipulation libre pour permettre aux élèves de comprendre la consigne qui leur sera proposée.

Pour le déroulement de la phase de recherche, il est nécessaire de prévoir des courts moments de mise en commun des procédures utilisées de manière à permettre aux élèves de confronter leurs méthodes.

Sur le plan matériel, il est important de prévoir :

- deux modèles grand format du napperon pour le tableau afin de pouvoir plier et manipuler l'un d'eux lors des mises en commun
- des modèles individuels comme il a été indiqué au paragraphe 1.1,
- de nombreuses feuilles de papier aux dimensions souhaitées pour la réalisation des napperons (dimensions différentes de celles des modèles individuels),
- un ou plusieurs napperons supplémentaires plus complexes pour gérer le temps (napperons présentant davantage de découpes, éventuellement plus d'axes de symétrie pour les élèves rapides). En revanche, il ne me semble pas pertinent ici de prévoir des napperons moins complexes pour des élèves ayant quelques difficultés à anticiper, ou pour des élèves lents car cette situation doit pouvoir servir de référence à l'ensemble de la classe et donc avoir été travaillée par tous.
- des paires de ciseaux pour chaque élève.

2. Déroulement de la séance

2.1. Phase de recherche

La toute première phase est un temps de manipulation libre. Les élèves disposent de feuilles de papier et d'une paire de ciseaux. La consigne est simplement de plier le papier comme on le désire puis d'effectuer des découpes, d'ouvrir le papier, d'observer le résultat obtenu, de faire divers constats.

Dans cette phase, la manipulation a pour rôle essentiel de permettre à chacun d'accumuler des expériences.

Dans un deuxième temps, les élèves sont mis en situation de faire des prévisions, d'anticiper le résultat de leur action, et de valider par eux-mêmes leur travail.

Un découpage réalisé dans du papier plié que nous appellerons "napperon" est affiché au tableau (cf. annexe1).

Consigne :

Vous devez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela vous devez effectuer tous les pliages que vous jugez nécessaires, puis, vous devez effectuer tous les découpes que vous jugez nécessaires, enfin vous déplierez et comparerez votre réalisation avec le modèle. S'il y a conformité, vous avez "gagné", sinon, vous conservez votre réalisation, sans la froisser, sans la jeter, pour pouvoir l'étudier et vous recommencez avec un autre papier.

Les critères de réussite sont précisés :

Un napperon sera considéré comme "conforme" au modèle si les formes géométriques des découpes sont respectées ainsi que leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

Après un temps de recherche, on constate que les stratégies sont nombreuses et variées.

Dans tous les cas, on peut noter une attention soutenue.

Lors du dépliage, les élèves peuvent être très surpris des résultats obtenus car leur napperon est souvent extrêmement différent du modèle.

La validation se fait individuellement par confrontation au modèle en s'appuyant sur les critères de réussite définis précédemment. Les élèves n'ont généralement pas trop de difficultés à effectuer cette comparaison. Il se peut cependant que certains pensent avoir réussi alors que leur découpage n'est pas conforme au modèle. Un questionnement individualisé dirigé par le professeur permet généralement à l'élève concerné de prendre conscience de ce qui ne convient pas.

Généralement au premier ou au second essai peu d'élèves réussissent la tâche. Il est alors souvent nécessaire de demander aux enfants qui ont obtenu un résultat satisfaisant, au moins pour certains éléments, de présenter aux autres leur méthode avant de relancer la recherche. Les élèves recommencent avec une nouvelle feuille de papier. A ce moment on peut observer que plusieurs élèves reprennent le premier essai, le replient, l'ouvrent plusieurs fois, avant d'effectuer pliages et découpes. Les erreurs sont donc ici analysées pour être dépassées.

Le nombre d'essais avant l'obtention d'une réalisation conforme au modèle est très variable suivant les élèves et les classes : quelques uns réussissent du premier coup - dans ce cas le professeur leur donne individuellement un autre napperon plus complexe à reproduire -, pour d'autres, plusieurs essais (parfois huit ou dix) sont nécessaires pour que le résultat soit jugé satisfaisant par son auteur.

2.2. Mise en commun des productions et des stratégies

Lorsque de nombreux élèves ont obtenu un résultat satisfaisant, le professeur propose une mise en commun des différentes stratégies utilisées, qu'elles aient abouti ou non, et des productions correspondantes (le professeur prend soin de choisir des productions erronées qui relèvent de types différents⁴).

Lors de cette mise en commun, les élèves énoncent généralement deux types de stratégies :

- Repérer les axes de symétries, déterminer un domaine fondamental dans lequel se trouve le motif minimum, déterminer le pliage à effectuer pour obtenir ce domaine fondamental, positionner le papier plié de manière à pouvoir exécuter les découpes en fonction du motif identifié dans le domaine fondamental. Cette stratégie est efficace et experte, elle est proposée par les élèves avec des formulations diverses.

- Identifier les découpes qui se répètent, plier en fonction du nombre de répétition, découper des moitiés ou des quarts de motifs à partir de l'analyse des répétitions. Cette stratégie peut être efficace, mais dans de nombreux cas, les élèves ont tellement fait tourner le papier plié que les découpes qui devraient se trouver au centre se trouvent sur les bords et vice versa.

Les productions correspondantes sont étudiées collectivement. Pour celles qui ne sont pas conformes au modèle les erreurs sont repérées et analysées (nombre de découpes, place des découpes, position relatives, forme, orientation).

Après ce temps d'échange, il est souhaitable de laisser un nouveau temps de travail aux élèves pour que tous aient réalisé un napperon conforme au modèle. Les élèves ayant déjà réussi, reçoivent un nouveau modèle, ce qui permet un réinvestissement des stratégies déjà utilisées ou un ajustement lorsque celles-ci étaient approximatives.

2.3. Institutionnalisation

Les éléments à institutionnaliser sont fonction du niveau de classe.

Donnons quelques exemples :

➤ Les axes de pliage sont appelés des axes de symétrie. Quand on plie le napperon sur un axe de symétrie les deux parties se superposent exactement. (cycles 2 et 3)

➤ Une figure admet un axe de symétrie si, lorsque l'on plie suivant l'axe de symétrie, les deux parties de la figure se superposent exactement. (cycle 2 et 3).

➤ Au cycle 3 et au collège, en fonction des formes de découpes présentes dans le modèle, les propriétés suivantes pourront être pointées :

- les médianes d'un rectangle, d'un carré sont aussi axes de symétrie de ces figures (cycle 3)

- les diagonales d'un losange, d'un carré sont aussi axes de symétrie de ces figures (cycle 3)

- la hauteur d'un triangle isocèle est axe de symétrie du triangle (collège)

- la bissectrice d'un angle est axe de symétrie (collège)

- lorsqu'une figure admet deux axes de symétrie, ces axes sont perpendiculaires et leur point commun est un centre de symétrie de la figure (collège).

A la suite de cette activité, il est important de prévoir quelques jours plus tard un moment au cours duquel les enfants auront à évoquer ce qui a été fait au cours de la séance précédente et à réaliser un résumé (une trace écrite reprenant les points qui auront été institutionnalisés) qui pourra être consigné dans le cahier de chaque élève avec le napperon collé sur lequel devront figurer les axes de symétrie. Ce résumé peut également faire l'objet d'un

⁴ Le professeur choisit des napperons qui ont été abandonnés parce que considérés comme non conformes par leurs auteurs, éventuellement des napperons que leurs auteurs considéraient à tort comme conformes. Il est souhaitable de présenter au débat des napperons ne présentant pas le nombre d'axes de symétrie requis, des napperons ne présentant pas le nombre correct de découpes, des napperons présentant des inversions dans les positions relatives des découpes, des orientations erronées, de manière à ce que l'analyse menée sur ces réalisations conduise à mettre en évidence les différents critères de conformité au modèle. On trouvera en annexes 2 et 3 des exemples de napperons réalisés par des élèves de CE2 ayant été affichés pour la mise en commun lors de la réalisation du modèle n°3.

affichage et permettre ainsi la constitution d'une mémoire collective de l'histoire de la classe (d'où l'importance d'avoir fait travailler tous les élèves sur le même napperon).

3. Quelques remarques

3.1. L'activité des élèves au cours de cette situation

Dans la première phase de manipulation libre permettant l'entrée dans l'activité, la main travaille, mais l'esprit est peu sollicité. Au moment de l'observation des réalisations, certains élèves peuvent développer une activité de pensée en cherchant à justifier les constats qu'ils peuvent faire, mais cette activité n'est pas à proprement parlée requise pour réaliser la tâche demandée.

Dans la deuxième phase, lorsqu'il s'agit de reproduire le modèle, l'esprit est mobilisé en même temps que la main. L'enfant développe une réelle activité cognitive, il anticipe son action, il la prévoit, la manipulation sert à réaliser matériellement cette anticipation et à la valider. C'est dans cette deuxième phase que l'on peut parler d'activité mathématique.

3.2. Rôle des manipulations

Les manipulations ont ainsi trois fonctions :

- accumuler des expériences
- être un support pour l'anticipation
- valider le résultat d'un raisonnement, et par suite le raisonnement lui-même.

3.3. Rôle de l'erreur

Dans cette situation, le rôle positif de l'erreur est mis en évidence : en effet, c'est à partir de l'analyse d'un napperon non identique au modèle que l'élève modifie ses prévisions et rectifie ses pliages et ses découpages.

Par ailleurs, tous les napperons obtenus, qu'ils soient ou non conformes au modèle, présentent des axes de symétrie, ils constitueront donc un matériel intéressant pour entraîner les élèves à repérer des axes de symétrie dans des figures variées.

3.4. Gestion du temps

Le temps pour réaliser correctement la tâche est très variable. De manière générale, il faut laisser beaucoup de temps aux enfants pour qu'ils puissent construire leur stratégie. Il est donc nécessaire de prévoir d'autres napperons pour les plus rapides pour gérer convenablement le temps de la séance.

Conclusion

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes en développant un raisonnement. Pour que cette activité cognitive puisse avoir lieu le problème doit vérifier certaines caractéristiques⁵ notamment les suivantes :

- **Le problème doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé.** Ici, une reproduction conforme au modèle du napperon nécessite la reconnaissance de l'existence d'un ou plusieurs axes de symétrie, et l'utilisation de ces axes comme droite de pliage.

- **Le doit être "consistant", c'est à dire que la réponse ne doit pas être évidente sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement.** Dans l'activité proposée, c'est le choix du modèle pour le niveau de classe déterminé qui assurera la consistance.

- **L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer.** La phase initiale de manipulation libre permet aux élèves de s'engager dans la tâche de reproduction, mais les critères de conformité au modèle le conduisent à éprouver ses connaissances et éventuellement à les faire évoluer.

- **La validation doit être le plus possible à la charge de l'élève (on parle d'auto validation).** Dans la situation du napperon, cette auto validation est assurée pour un grand nombre d'élèves. Mais pour certains autres élèves, le professeur devra jouer son rôle de médiateur en questionnant l'élève de manière à le guider vers les bonnes questions.

- **Le problème doit pouvoir servir de référence pour la notion et pour la classe.** Cet aspect me paraît très important à souligner. En effet, s'il est nécessaire de penser l'enseignement en prenant en compte l'hétérogénéité des élèves et en prévoyant de différencier certaines tâches, une différenciation a priori au moment où les élèves vont avoir à travailler sur une notion nouvelle (ou reprise d'une année antérieure), à construire certaines de ses propriétés ou à se les approprier, il serait très regrettable et dommageable d'exclure certains élèves des situations censées permettre de construire du sens et d'hypothéquer ainsi toutes possibilités ultérieures de faire appel à cette

⁵ Ces caractéristiques ont été mises en évidence par R. DOUADY, RDM.7.2. La pensée sauvage (1987).

situation pour mobiliser la mémoire de tous les élèves. Par ailleurs, il me semble important que chaque élève ait à chaque fois "sa chance" sur l'étude d'une nouvelle notion et n'ait pas à subir son éventuelle image d'élève faible ou en difficulté⁶ avant même d'avoir été confronté au problème posé.

La situation présentée ici, pour prendre tout son sens dans une progression sur la symétrie axiale, devra bien sûr être suivie de nombreux exercices d'entraînement et de nouveaux problèmes avant de donner lieu à des exercices d'évaluation qu'il sera d'ailleurs judicieux de différer dans le temps. Ce n'est pas en effet après une seule rencontre avec une notion qu'il est possible de savoir si les élèves se sont approprié certaines propriétés de cette notion. Il faudra de même attendre que d'autres notions aient été étudiées, pour évaluer la capacité des élèves à reconnaître par eux-mêmes des situations relevant de la symétrie axiale et à les traiter correctement.

⁶ "L'effet Pygmalion" a été mis en évidence par plusieurs chercheurs, notamment ROSENTHAL et JACOBSON (1975). Les prédictions négatives des enseignants sur certains de leurs élèves se vérifieraient d'autant plus qu'elles seraient "attendues" et par certains aspects construites par les enseignants eux-mêmes. On pourrait dire que certains enfants se conformeraient à l'image que l'enseignant leur renvoie.