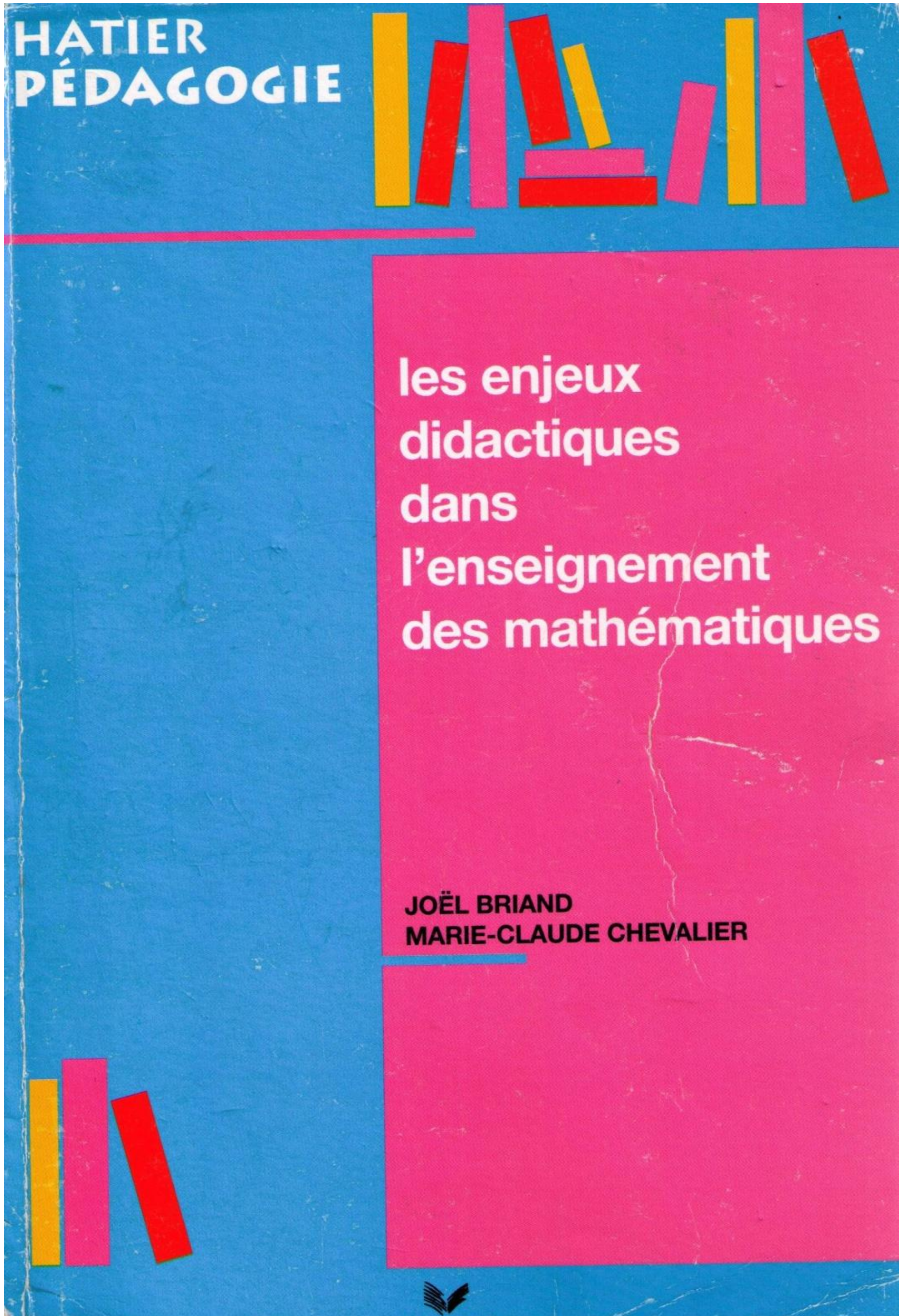


LES ENJEUX DIDACTIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Joël Briand
a enseigné en Lycée
et École normale
et enseigne actuellement à l'IUFM
de Bordeaux.
Il participe à différents travaux
de recherche à l'IREM de Bordeaux
et au LA.DI.S.T. de Bordeaux I.

Marie-Claude Chevalier
a enseigné en Lycée et École normale,
puis à l'IUFM de Toulouse.
Elle enseigne actuellement
au lycée Gaston Monnerville de Cahors.
Elle a participé à différents travaux
de recherche à l'IREM de Toulouse
et au LA.DI.S.T. de Bordeaux I.
Elle a animé de nombreux stages
de formation continue d'enseignants
(COPIRELEM et MAFPEN).

Cet ouvrage a été rédigé en 1995.
Comme une partie s'adressait aux candidats aux concours de Professeur des écoles d'alors, certains points sont obsolètes. Un bandeau le signale.
Toutefois, l'ensemble de la démarche me paraît encore être utile à un enseignant du premier degré qui souhaite s'informer de ce que peuvent apporter, à sa pratique de l'enseignement des mathématiques, certains travaux en didactique.

J. Briand. Janvier 2014

Composition et mise en page : **Nicole Pellieux**
Écritures manuscrites : **Nicole Vilette**
Dessins techniques : **Domino et Nicole Pellieux**

ISBN 2-218-**02207-9**

SOMMAIRE

DEUXIÈME PARTIE

UN CADRE THÉORIQUE POUR UNE PROFESSIONNALISATION

TROISIÈME PARTIE

PRÉPARATION AU CONCOURS DE PROFESSEUR DES ÉCOLES

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

À QUI S'ADRESSE CET OUVRAGE ?

Notre ouvrage veut permettre à tous ceux qui pensent que l'enseignement des mathématiques n'est pas qu'une simple affaire de bon sens, de trouver quelques pistes permettant d'en faire une profession :
– le caractère professionnel de l'enseignement est lié à la caractérisation de faits d'enseignements ;
– la caractérisation des faits d'enseignement justifie et nécessite une théorie didactique qui définit ses propres concepts.
Dès le début de cet ouvrage, nous nous attachons à caractériser des phénomènes d'enseignement des mathématiques et nous proposons de familiariser le lecteur avec quelques concepts de didactique des mathématiques.

Cet ouvrage s'adresse avant tout aux étudiants qui préparent le concours de professeur des écoles. Dans sa forme actuelle, ce concours propose, pour l'épreuve de mathématiques, deux volets ; le second volet a pour objet l'analyse « des approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes »[1].

Ce livre intéresse tout particulièrement les étudiants de deuxième année d'IUFM[2] (professeurs des écoles du C.A.P.E.S.). Il propose une réflexion générale sur les pratiques actuelles d'enseignement, présente des outils d'analyse et permet ainsi de mieux comprendre comment élaborer des situations qui réunissent les conditions d'un véritable apprentissage par les élèves.

Il peut être utile aux étudiants de D.E.U.G. ou licence qui optent pour des U.V. optionnelles de préprofessionnalisation.

De plus les nombreuses références bibliographiques, des citations de chercheurs en didactique des mathématiques pourront aider les étudiants qui préparent un D.E.A. de didactique des mathématiques.

1. Bulletin Officiel, n° 5 du 30 janvier 1992.

QUELS CONTENUS POUR SE FORMER À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ?

L'idée que, pour enseigner les mathématiques, il suffirait de bien connaître les contenus mathématiques, est fausse. Cette connaissance est bien sûr nécessaire, mais certainement pas suffisante. Prenons l'exemple de l'école élémentaire.

• D'une part, la plupart des notions étudiées à l'école élémentaire sont reprises et approfondies au collège. Il est donc indispensable d'avoir une maîtrise de ces notions dans leur continuité. De plus, faire des mathématiques, résoudre des problèmes, avoir envie de chercher est une pratique qui s'entretient bien au-delà des contenus de l'école élémentaire.

• D'autre part, la formation à l'enseignement des mathématiques fait appel à d'autres contenus qui permettent d'aborder les questions suivantes :

– Comment un enfant apprend-il ?
– Quelles transformations subissent les savoirs mathématiques lors de leur enseignement ?
– Quels effets peuvent être prévisibles, souhaitables, néfastes ?
– Quels rôles joue le professeur ?
– Quelles décisions peuvent être prises ?

Autant de questions qui font qu'une formation à l'enseignement des mathématiques ne saurait se réduire ni à l'acquisition de contenus mathématiques, ni à un discours de pédagogie générale (qui, par nature, exclue l'étude des contenus).

PRINCIPE ET ORGANISATION DE L'OUVRAGE

L'apport constant d'information en didactique des mathématiques crée l'unité de cet ouvrage. Les principaux concepts sont progressivement introduits et illustrés à l'aide de nombreux exemples. Afin de mieux s'investir dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques, le lecteur est invité à résoudre des exercices de deux types : des exercice à caractère strictement mathématique et d'autres à caractère plus didactique.

Ce livre comprend plusieurs parties indépendantes, il ne nécessite pas une lecture linéaire.

• La première partie de l'ouvrage consiste en une réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Nous proposons plusieurs angles d'approche des phénomènes d'enseignement. Nous partons d'une série de questions, présentons des exemples, donnons des débuts de réponses et introduisons des concepts de didactique qui apparaissent comme des outils privilégiés d'analyse.

• La deuxième partie étudie le cadre théorique à partir duquel il devient possible de mieux comprendre les préoccupations concrètes de la didactique des mathématiques, les points de vue de ses chercheurs. Elle précise l'apport de la didactique pour la formation professionnelle des enseignants.

• La troisième partie de l'ouvrage, est spécifiquement destinée aux étudiants préparant le concours de professeur des écoles. Le rappel du texte du Bulletin Officiel définissant l'épreuve de mathématiques permet de repérer dans l'ensemble du livre ce qui est prioritaire pour les candidats. Nous avons voulu préciser, dans cette dernière partie, la problématique de la formation professionnelle et proposer des exercices ou devoirs avec éléments de correction dans l'esprit de l'épreuve actuelle de ce concours.

• En fin d'ouvrage, se trouvent les corrigés des exercices qui ont été proposés tout au long du livre.

• La bibliographie [illegible] permettra à chacun de se reporter aux ouvrages clés pour approfondir les points qui l'intéressent.

• Enfin un index (page 237) permet de situer les termes de didactique et leurs définitions dans l'ouvrage.

INTRODUCTION

LES MATHÉMATIQUES DANS NOTRE SOCIÉTÉ

De notre point de vue, il serait illusoire d'imaginer l'enseignement des mathématiques, quels que soient les élèves auxquels il s'adresse, sans débattre et réfléchir sur :
– la place et le rôle des mathématiques dans notre société ;
– le rapport personnel des élèves aux mathématiques ;
– le rapport personnel de chaque enseignant aux mathématiques.

L'IMAGE ACTUELLE DES MATHÉMATIQUES DANS LA CULTURE

Qui n'a pas entendu un jour telle ou telle personne ayant une position sociale reconnue s'exclamer « oh, moi, les maths je n'y comprenais rien ! ». En revanche, il est peu probable d'entendre : « oh, moi, écrire en français, je ne sais pas faire ». Il est encore accepté culturellement d'avoir eu des difficultés en mathématiques (feintes ou réelles), mais rédiger une lettre dans un français approximatif ponctué de fautes d'orthographe n'est pas admis. Notre société n'attribue pas les mêmes valeurs culturelles aux mathématiques (aux sciences en général) et aux disciplines littéraires. Cette cassure entre les disciplines scientifiques et littéraires est d'ailleurs un phénomène récent à l'échelle de l'histoire.

Les mathématiques de la scolarité obligatoire constituent actuellement un enjeu important, un enjeu du point de vue de la réussite scolaire ainsi qu'un enjeu personnel : la réussite en mathématiques est (à tort ou à raison) considérée quelquefois comme un signe d'intelligence. Or, paradoxalement, ces mathématiques omniprésentes dans la vie scolaire n'apparaissent pas nécessaires dans la vie de tous les jours : « À quoi ça sert » dira un élève. Pour développer cet aspect, citons Y. Chevallard[3] :

« La polémique sur les mathématiques et leur rôle dans l'enseignement secondaire est une activité saisonnière solidement établie. On en connaît les termes, qui ne laissent guère d'espoir. D'un côté, les mathématiques

3. Y. Chevallard : « Pour en finir avec une certaine phobie culturelle », *Science et Vie*, hors série n° 180, septembre 1992, pp. 60, 64, 66.

constitueraient un passage obligé sur la route de la réussite scolaire et sociale. De l'autre, leur difficulté ne serait plus à dire. Pour cela il faudrait se résigner et attendre que jeunesse se passe. [...] Toutes les pratiques sociales ou presque sont aujourd'hui construites avec des mathématiques. Tous les objets qui nous entourent – cet ordinateur, bien sûr, mais aussi ce stylo, et cette feuille de papier, et cette table devant laquelle je suis assis, même – contiennent des mathématiques cristallisées. Les mathématiques sont l'un des ingrédients de base avec lesquels se construisent les sociétés actuelles. D'où cette image : si l'on coupait l'électricité dans la ville, tout ou presque cesserait de fonctionner. De même si l'on y coupait les mathématiques. [...] Les mathématiques, à cet égard, se distinguent entièrement du latin. Les premières sont vitalement omniprésentes dans la production de nos sociétés ; le second ne l'est pas. Ou du moins ne l'est plus. En quelques siècles, les positions se sont totalement inversées. La comparaison avec l'électricité est trompeuse sur un point décisif. Chacun ressent immédiatement et personnellement les effets d'une coupure d'électricité. Mais si on coupait les mathématiques, nous ne découvririons que lentement, et sans doute trop tard, que socialement, nous ne savons plus vivre sans elles. »

LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Des programmes officiels déterminent les contenus d'enseignement de l'école, du collège et du lycée. Pour l'école élémentaire regardons l'évolution au cours des dernières années.

Les programmes de 1945 étaient construits avec l'idée que l'enfant ne pouvait avoir accès aux mathématiques avant la classe de cinquième. L'objectif était clair : savoir calculer, savoir résoudre des problèmes types, c'est-à-dire des problèmes analogues à des problèmes traités en cours. Le mot « calcul » devait donc être pris ici au sens de « mise en place de mécanismes » ou renvoyer à des familles de problèmes types. On était loin de l'activité mathématique qui consiste à résoudre des problèmes ou poser des questions. On imagine aisément que de telles déclarations ont laissé des traces dans la mémoire collective enseignante.

Plus récemment les programmes fixés par arrêté du 23 avril 1985 marquent une évolution qui ne s'est pas faite sans heurts.

« L'enseignement des mathématiques vise à développer le raisonnement et à cultiver chez l'élève les possibilités d'abstraction. Il apporte une exigence de rigueur dans la pensée et de justesse dans l'expression. Il fait acquérir des connaissances et des compétences dans les domaines numériques et géométriques, tout en aidant l'élève à se forger des méthodes de travail. Il stimule l'imagination[4]. »

Dans les textes concernant la mise en place des cycles à l'école primaire[5], la définition des compétences à acquérir au cours de chaque cycle est organisée en plusieurs rubriques :
- résolution de problèmes ;
- approche du nombre ou connaissance des nombres ;
- calcul ;
- géométrie ;
- mesure.

Le développement du raisonnement et l'apprentissage à la résolution de problèmes y trouvent une place importante. « Les compétences plus spécifiques définies ci-après (nombre, calcul...) se construisent et s'évaluent, de préférence, au cours d'activités de résolution de problèmes[6]. »

RAPPORT DES ÉLÈVES AUX MATHÉMATIQUES

En interrogeant des élèves du primaire ou du secondaire sur ce qu'ils pensent des mathématiques on obtient des réponses très variées comme :
- « j'ai horreur des math et je suis nul » ;
- « c'est intéressant mais on ne voit pas à quoi ça sert » ;
- « j'adore, c'est un jeu ».

Ce rapport aux mathématiques est souvent très influencé par l'histoire du moment et peut donc évoluer au cours d'une scolarité. Il arrive cependant que certaines blessures se creusent et débouchent sur un sentiment d'échec. Les parents, les enseignants ont ici un rôle important à jouer afin qu'un élève momentanément en difficulté ne se sente pas exclu de l'activité mathématique.

L'école doit aider chacun à construire une image positive de soi en tant que mathématicien c'est-à-dire permettre à tout élève d'entrer dans des activités de recherche, de formuler des hypothèses, de les mettre à l'épreuve...

RAPPORT DES ENSEIGNANTS AUX MATHÉMATIQUES ET AU MÉTIER D'ENSEIGNANT : REPRÉSENTATIONS DES ENSEIGNANTS

Un enseignant de mathématiques (professeur d'école ou professeur du secondaire) a un rapport privé au savoir mathématique. De plus, avant d'exercer et parce qu'il a été lui même élève de classe de mathématiques, il a des idées personnelles sur la manière dont il faut enseigner. Ces représentations influent constamment sur sa pratique professionnelle. Citons,

5. 6. Les cycles à l'école primaire, décret 90-788 du 6 Septembre 1990, CNDP, Éditions

à ce propos, A. Robert[7] : « Notre première hypothèse générale à ce sujet est qu'il est vain de séparer la formation en didactique de la formation en général, tant la conception d'un enseignement de mathématiques est liée aux mathématiques elles-mêmes et donc à l'enseignement qu'on en a eu. [...] Notre deuxième hypothèse est qu'on ne peut pas faire comme si les (futurs) enseignants étaient vierges en matière d'idées sur l'enseignement des mathématiques. »

En étudiant ces interférences entre rapports privés et professionnels « la didactique des mathématiques se doit de contribuer à une "profession-nalisation" de ceux qui ont la charge d'enseigner »[8]. Il n'y a pas de déterminisme à être un bon ou mauvais enseignant de mathématiques. Toute personne qui a une connaissance théorique correcte d'un objet mathématique devra acquérir des compétences professionnelles pour pouvoir l'enseigner. Le futur professeur construira ces compétences en s'appuyant sur ces représentations initiales et en les faisant évoluer.

7. A. Robert : « Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants) », *Cahier de didactique*, n° 50, IREM de Paris VII, 1988, pp. 2-3, 14-15.

8. A. Robert : *L'illusion pédagogiste.*

1re PARTIE

RÉFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET PREMIÈRES NOTIONS DE DIDACTIQUE

Toute action d'enseignement met en jeu les trois composantes principales :
– les élèves pour lesquels la société a défini un certain projet éducatif ;
– le savoir visé par cette action d'enseignement (en l'occurrence pour nous les mathématiques) ;
– le professeur dont le rôle, dans le système français, est d'être un médiateur entre l'élève et le savoir.

Ces trois composantes vont interagir et donner des faits d'enseignement. Certains de ces faits sont reproductibles et apparaissent ainsi comme des phénomènes d'enseignement.

Les recherches développées en didactique des mathématiques ont élaboré des outils d'analyse qui permettent de reformuler des questions naïves, d'interpréter des faits, de prévoir des phénomènes.

Nous proposons dans cette première partie d'étudier des phénomènes d'enseignement et de montrer en quoi les premiers concepts de didactique des mathématiques sont des outils d'analyse adaptés.

1 LES PRATIQUES SPONTANÉES D'ENSEIGNEMENT

Chaque adulte s'est, à un moment donné de sa vie, retrouvé dans la situation d'apprendre quelque chose à quelqu'un et donc de mettre en œuvre des modèles spontanés d'enseignement. Enseigner est une activité qui paraît aller de soi lorsque l'on maîtrise les savoirs en jeu.

C'est à partir de ce constat que nous allons regarder, sur des exemples, en quoi les modèles spontanés d'enseignement produisent des effets qui ne sont pas forcément propices à l'activité mathématique chez l'élève.

Cette étude, nous conduira à poser les bases nécessaires au passage d'un enseignement spontané à un enseignement à caractère professionnel.

1.1 LE MYTHE DU MODÈLE À REPRODUIRE

■ Un exemple hors contexte scolaire

« Mon enfant sait compter jusqu'à 30, mais je lui ai un peu appris… » Cette déclaration, un jour de rentrée des classes est intéressante pour notre propos. Implicitement, voici une personne qui, à un moment donné, s'est fixé des objectifs et a dû mettre en jeu quelques pratiques spontanées d'enseignement. Ainsi en général, un adulte dit d'un enfant qu'il sait compter jusqu'à 30 (par exemple) si cet enfant sait réciter la comptine[9] de 1 à 30. Si l'enfant oublie un nombre, l'adulte fait répéter le mot manquant : par exemple, si l'enfant a récité 23, 25, le parent lui dira : « après 23, il y a 24 » et l'enfant reprendra « 23, 24, 25 », etc. Il y a bien là objectif et pratique d'enseignement. La comptine est une pratique culturelle courante. On connaît les comptines chantées, les comptines dessinées, etc. Mais ce parent serait peut être surpris de constater que son enfant sait « compter » jusqu'à 30, et qu'il ne peut pas aller chercher, par exemple, 15 fourchettes, à la demande. Dans l'action de compter, l'enfant devra bien sûr réciter la comptine, mais aussi synchroniser

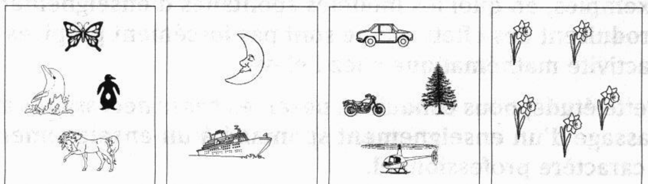
9. Comptine : suite ordonnée des noms des nombres « un, deux, trois… »

les gestes lui permettant de prendre les objets un à un, détacher le nombre 15, etc. En fait, la comptine n'est pas le comptage. L'enfant de notre exemple sait-il réellement compter ? C'est-à-dire, répète-t-il simplement une suite de mots comme un rituel dénué de sens ou bien a-t-il compris que cette suite associée intentionnellement à une gestuelle organisée pouvait l'aider dans certains types de tâches (ici le dénombrement) ? La démarche adoptée par ce parent, qui relève plutôt du rite initiatique, ne permet pas de s'en assurer.

Un exemple en contexte scolaire

Voici un exercice fréquemment proposé à des élèves de cours préparatoire.

Barre, pour chaque collection, les nombres qui ne conviennent pas.



1 3 4	3 2 5	3 5 4	3 2 5

Pour répondre à la consigne, l'élève doit savoir dénombrer (au sens strict) les objets (jusqu'à 5), savoir reconnaître l'écriture des nombres quatre deux et cinq et conclure.
Étudions le cas d'un enfant qui aurait barré le 1 et le 4 au premier item de l'exercice : quelles que soient les raisons de l'échec, l'exercice lui-même, dans sa construction, ne permet pas à l'élève de savoir s'il a échoué ou non. On dira que cet exercice ne produit pas une rétroaction[10] permettant à l'élève d'évaluer lui-même s'il a réussi ou échoué et donc, habituellement, l'élève attendra le jugement du professeur pour savoir s'il a réussi ou non. Le recours du professeur va être d'établir un diagnostic (s'il en a le temps) en demandant par exemple à l'élève de recommencer son travail devant lui. Ainsi s'élaborera une autre situation que l'exercice lui-même, qui sera construite « à chaud », et dont on peut penser qu'elle ne permettra tout au plus qu'une imitation. L'exercice lui-même, vise donc un contrôle de l'aptitude à reproduire une écriture (socialement connue). Un tel exercice est nécessaire à un moment de

10. Rétroaction : information en retour sur l'action du sujet. Cf. M.-C. Chevalier : « Étude des

l'apprentissage pour s'assurer si l'élève a acquis l'écriture de ces nombres, mais il ne peut être assimilé à une situation d'apprentissage des nombres. Le proposer à des élèves avec un objectif d'apprentissage serait une autre façon de ritualiser l'usage du nombre sans que l'élève ait eu à un moment donné à se convaincre de son utilité.
Tout futur enseignant en mathématiques peut se poser les questions relatives aux savoirs en jeu : dans notre exemple, le savoir ainsi transmis est-il utilisable ? Est-ce suffisant pour l'acquisition du nombre ? Aide-t-il à la construction du nombre ?

Des conduites automatisées

Prenons un exemple quelques années plus tard au collège.
Un élève de quatrième résout l'équation suivante :

$$4x + \frac{3x}{4} - 7 = 5x - 8 - \frac{2x}{8}$$

il écrit :

$$4x + \frac{3x}{4} - 7 = 5x - 8 - \frac{2x}{8}$$
$$\frac{3x}{4} - 7 = x - 8 - \frac{2x}{8}$$
$$\frac{3x}{4} - 7 = x - 8 - \frac{x}{4}$$
$$\frac{3x}{4} = x - 1 - \frac{x}{4}$$
$$x = x - 1$$
$$0 = -1$$

et s'exclame… : « les x sont partis ! »
L'élève utilise un procédé quasi-automatique de résolution d'une équation qui consiste à « supprimer de chaque côté » les termes qui se ressemblent, et à réduire ainsi l'écriture. Ce type de procédure donne en général des résultats justes. Dans le cas étudié, cette procédure produit un effet non explicable par l'élève.
Pour que l'élève puisse comprendre ce qui arrive, il faudrait qu'il ait bien en tête :
- qu'une équation n'est pas une égalité mais une interrogation : existe-t-il x tel que… ?
- que résoudre une équation consiste, par un jeu de transformations d'écritures autorisées par des règles de calcul répertoriées, à produire une équation équivalente à l'équation initiale mais pour laquelle on sait répondre à l'interrogation.
- que le procédé utilisé doit « rester sous surveillance ».

En somme c'est tout le sens de l'activité de résolution d'une équation qu'il faut mobiliser pour ne pas être pris au dépourvu par une « équa-

« 0x = – 1 » est une équation qui n'a pas de solution, l'équation initiale qui lui est équivalente n'a pas de solution. C'est de cela qu'il faut débattre avec l'élève qui constate que « les x sont partis ».
Dans le même exercice on trouvera des élèves avec qui la discussion sera plus difficile à conduire. Ce sont ceux par exemple qui arrêteront leur travail à « 0 = – 1 » sans que cela les surprenne ou encore ceux qui rétabliront une conclusion conforme à celle généralement attendue par l'école en disant « donc x = 0 ».
On voit bien les effets de l'usage abusif d'une procédure sans contrôle du sens. Cet équilibre entre les nécessaires automatismes et le contrôle du sens constitue un objectif pour le professeur vis-à-vis de ses élèves. Tout recours prématuré aux « trucs » donne des résultats le plus souvent corrects, mais il hypothèque généralement une réelle activité mathématique.
Remarque : dans ce deuxième exemple, nous n'abordons pas la question de la mise en équation. Or, la mise en équation constitue un souvenir désagréable pour nombre d'étudiants ayant eu des difficultés en mathématiques. L'histoire des mathématiques montre toute la difficulté qu'il y a eu à passer des raisonnements arithmétiques aux raisonnements de type algébrique. Ce passage n'est pas pris en compte dans l'enseignement. Il n'est donc pas étonnant que des difficultés apparaissent (en classe de 4e et 3e) lors de l'introduction de l'algèbre.

Voici un exercice traditionnel d'arithmétique (brevet supérieur de début du siècle). Son traitement par l'algèbre constitue une rupture dans la manière de raisonner.

Les problèmes en euros !

***Exercice* (corrigé page 211)**

Un épicier a du café à 3,80 F le kg et du café à 4,30 F le kg. Dans quelle proportion doit-il les mélanger pour obtenir du café à 4 F le kg ?

Résoudre cet exercice dans le cadre arithmétique puis dans le cadre algébrique.

L'exercice qui suit est classique en algèbre. La mise en équation consiste principalement en une relecture de l'énoncé et une traduction en un langage formel.

***Exercice* (corrigé page 211)**

Actuellement, l'âge du capitaine est le double de celui de Frédéric. Dans 5 ans, ils auront à eux deux 70 ans. Quel est l'âge du capitaine ?

Mettre en équation ce problème et le résoudre.

Les interrogations qui précèdent nous renvoient à la question « qu'est-ce qu'apprendre des mathématiques ? »[11]. La réponse ne se trouve pas dans les seuls ouvrages de mathématiques, et pour appréhender cette question, il faudra interroger d'autres domaines que les mathématiques, en particulier, la psychologie cognitive, la sociologie, etc.

1.2 L'IDÉE DU SAVOIR À CONSTRUIRE

Comment dépasser les pratiques rituelles rencontrées dans les exemples précédents, c'est-à-dire, pour reprendre l'enseignement des premiers nombres, comment construire des situations dans lesquelles le nombre ne soit plus simplement montré, mais apparaisse comme solution à un problème réel ? Pour pouvoir répondre à cette interrogation, nous allons provisoirement nous éloigner de l'enseignement et étudier une activité spontanée d'enfant.
Lorsqu'un enfant de 5 ans est appelé à mettre le couvert, chez lui, il peut avoir plusieurs attitudes :
– il prend l'assiette pour maman, va la poser ; il prend l'assiette pour papa, va la poser, etc. ;
– il prend beaucoup d'assiettes et est ainsi assuré d'avoir « ce qu'il faut » ;
– il prévoit l'assiette pour maman, papa, etc. et va ensuite les poser.

Cette situation est non didactique car il n'y a pas d'intention d'enseignement. Elle met en jeu un savoir. Il s'agit de la correspondance terme à terme ou, dans la troisième attitude, du dénombrement[12]. Dans ce dernier cas, le nombre, formulé ou non, est la solution du problème que l'enfant s'est posé.
Il existe donc des activités hors milieu scolaire qui sollicitent la connaissance du nombre. Une reproduction de la situation décrite peut être utilisée à des fins d'enseignement et devenir une situation didactique. Pour l'enfant de 5 ans, le problème garde son sens, même s'il est une reproduction artificielle d'une situation réelle. La situation ne peut permettre un apprentissage de la connaissance visée que si le problème que l'on souhaite voir résoudre est bien celui que l'enfant se pose. En effet, un enfant plus jeune pourra se contenter de mettre des assiettes sur une table, sans faire référence à une liste de convives. Dans ce cas, la situation ne fonctionne pas comme situation d'apprentissage.

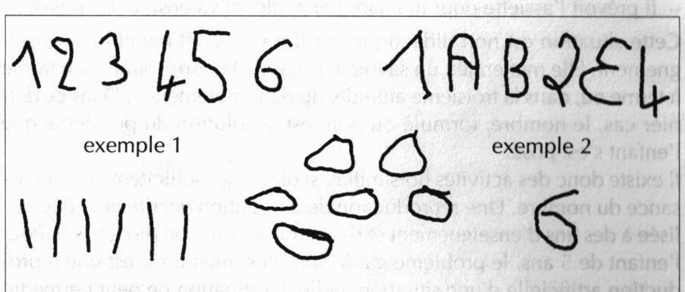
---

11. On pourra se reporter au chapitre « Repères psychocognitifs » du livre *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* de S. Johsua et J.-J. Dupin, PUF, pp. 71-119.

12. Nous retenons deux acceptations du terme « dénombrement » :
– Le dénombrement au sens strict : dénombrer une collection, c'est considérer le dernier terme de la liste ordonnée des nombres produite dans le comptage comme une caractéristique de la collection.
– Le dénombrement au sens large : dénombrer une collection c'est pouvoir construire une collection équipotente à une collection donnée sans présence de cette collection.

Pour que l'enfant travaille sur le nombre, il faut optimiser l'apparition de la troisième attitude il prévoit l'assiette pour maman, papa, etc., et va ensuite les poser. Pour cela, l'enseignant va devoir organiser la situation, imposer des contraintes. Il ne peut faire appel au vécu personnel de l'enfant. Il doit d'abord adapter la situation au contexte de la classe : par exemple, la collection à laquelle se réfère l'enfant dans son milieu familial (papa, maman, etc.) doit être remplacée par une collection construite par le maître (liste de prénoms d'enfants ou verres déjà installés sur la table). Il lui faut également imposer des contraintes pour que les élèves travaillent effectivement sur le nombre. Dans un premier temps, il posera comme enjeu de ne pas faire plus d'un aller et retour entre la pile d'assiette et la table. Plus tard il demandera à un élève de s'adresser cette fois par écrit à un autre élève qui aura la charge de préparer les assiettes nécessaires. Seule une communication écrite permet aux élèves de produire des formulations variées du nombre. C'est aussi l'occasion pour l'enseignant d'entrevoir les conceptions des élèves. Le dénombrement constitue la stratégie optimale pour réussir dans cette situation de base. Seule une communication écrite permet des formulations variées du nombre et d'entrevoir les conceptions des élèves relatives au nombre.

Voici des exemples de productions écrites issues de ce type de situation :



exemple 1 — exemple 2 — exemple 3 — exemple 4 — exemple 5

On peut observer dans cette situation une variété de productions écrites plus importante que dans la plupart des exercices couramment proposés.
– L'exemple 1 reproduit une section de la suite des nombres.
– L'exemple 2 est une production que l'on rencontre rarement. Rien ne permet d'affirmer que ce codage est erroné. En effet chaque signe peut simplement représenter un couvert et être compris comme tel par le récepteur. L'enfant veut probablement utiliser un code reconnu culturellement.

– Dans les exemples 3 et 4, l'enfant construit un message parfaitement adapté mais sans référence à une écriture conventionnelle.
– L'exemple 5 correspond à celui attendu après apprentissage de l'écriture conventionnelle.

Dès lors, l'élève peut :
– ne pas attendre l'avis de l'enseignant pour savoir s'il a réussi ou échoué ;
– constater une erreur et modifier sa stratégie en vue d'un prochain essai.

Cette situation permet aux enfants de constater qu'il y a ou non les assiettes nécessaires. Elle renvoie ainsi, à l'élève des rétroactions. Toutefois, pour les plus jeunes, cette situation pourra se réduire à un jeu au cours duquel il aura fallu amener des assiettes (sans se préoccuper du quantitatif). La situation n'exerce alors pas de rétroaction véritable. Mais dès que les élèves prendront à leur compte cette contrainte du quantitatif, la situation apportera les rétroactions escomptées par le professeur. Pour des raisons évidentes, il appartient donc à celui-ci de savoir à quel moment il est le plus judicieux de proposer une telle situation.

À la différence de l'exercice de la page 18, le concept de nombre se construit dans un contexte où il est fonctionnel. Parallèlement, le souhait de vouloir compter comme les grands, des débats autour des écritures, la connaissance partielle de l'écriture conventionnelle, l'idée d'alléger les messages élaborés conduiront les élèves à adopter finalement, avec l'aide du maître, les écritures conventionnelles.

Dans cette perspective, l'enseignement des mathématiques doit permettre à l'élève de prendre en charge un problème c'est-à-dire :
– émettre des hypothèses (cf. la situation de la mise du couvert) ;
– élaborer des procédures, les mettre en œuvre, et selon les effets produits, les adopter, les rejeter ou les faire évoluer ;
– automatiser celles qui sont le plus souvent sollicitées (par exemple savoir « poser » une addition, résoudre une équation du premier degré à une inconnue, etc.).
– exercer un contrôle des résultats obtenus. (Par exemple pour s'assurer d'un résultat numérique obtenu par une opération, se référer à l'ordre de grandeur, pour une équation vérifier si la solution trouvée satisfait à l'égalité de départ, etc.)

Pour cela, le professeur doit donc distinguer une situation où le savoir est sollicité (situation de contrôle où de réinvestissement comme dans l'exercice vu plus haut) d'une situation ou le savoir est en voie de constitution (situation d'apprentissage comme la mise du couvert avec des enfants ayant l'âge requis). Malheureusement, beaucoup de cours privilégient trop le premier type de situation, faisant l'hypothèse qu'en répétant les savoirs, on les aura construits.

Ajoutons que le temps joue un rôle important dans ce type de choix : bien souvent, pour une recherche d'efficacité à court terme, ou pour

gagner du temps, l'enseignant privilégie trop l'acquisition de techniques au détriment de la construction du sens. Le temps gagné à court terme fait croire à du temps gagné dans les apprentissages.
Les exemples qui précèdent (cf. pages 18-19) montrent les limites d'une telle pratique et la difficulté à remplacer un modèle d'enseignement centré sur une transmission directe du savoir par un modèle où l'élève construit ses connaissances.

3 THÉORIES DE L'APPRENTISSAGE

Depuis longtemps, philosophes, pédagogues et psychologues se sont interrogés sur les conditions dans lesquelles un enfant acquiert des savoirs. Plusieurs conceptions sont apparues.

- La conception dogmatique qui conduit à des apprentissages par répétitions de textes oraux ou écrits jugés fondamentaux.
- La maïeutique de Socrate[13] qui part du principe que tout homme est détenteur du savoir. Le rôle du pédagogue est alors de permettre à ce savoir de se révéler. Socrate comparait son art à celui de Phénarète qui était sage-femme : il ne se contente pas de convaincre son interlocuteur d'ignorance, il lui montre aussi qu'il porte en lui des vérités qu'il ignore (cf. le texte célèbre dans lequel Socrate amène un esclave de Ménon à découvrir comment on obtient un carré de surface double d'un carré donné).
- Jean-Jacques Rousseau réagit à l'éducation classique (clarté de l'exposé, mémorisation) principalement diffusée par les institutions religieuses. Élever un enfant, c'est moins lui apprendre quelque chose que le placer dans des situations où il prendra la mesure des difficultés. Il pense que l'autorité n'a pas à intervenir, la nature se chargera elle-même des réprimandes. « N'offrez jamais à ses volontés indiscrètes que des obstacles physiques, ou des punitions qui naissent des actions mêmes et qu'il se rappelle dans l'occasion : sans lui défendre de mal faire, il suffit de l'en empêcher »[14].
- Le début du 20e siècle reprend essentiellement les principes de l'éducation classique. Il s'agit de remplir des têtes vides ou de modeler des esprits encore « mous ». Cette approche conduit à interpréter les erreurs commises comme le signe d'une inaptitude. Dans cette mouvance, naissent les théories béhavioristes[15], thèses selon lesquelles il faudrait s'en tenir à l'étude systématique des comportements et des rapports qui existent entre les stimulations et les réponses de l'organisme. Les travaux de Skinner (1904-1990) développent des théories sur le langage et l'apprentissage fondées sur la thèse selon laquelle la répétition régulière des mêmes stimulations finit par produire des comportements et des savoir-faire.
- Plus récemment, les conceptions constructivistes ont largement contribué à mettre en cause ces conceptions antérieures. Piaget en particulier développe l'idée que c'est en agissant que l'on apprend. Les connaissances ne s'accumulent pas comme des strates. Elles passent d'un état d'équilibre à un nouvel état d'équilibre après d'être trouvées dans une phase transitoire au cours de laquelle les connaissances antérieures étaient remises en cause. Surmonter ce moment de déséquilibre suppose une réorganisation des connaissances intégrant les nouveaux acquis au savoir ancien. La résolution d'une difficulté cognitive aboutit alors à un nouvel équilibre (principe d'équilibration).
- C'est à Bachelard que l'on doit la notion de représentation spontanée à propos de certains phénomènes. Il développe alors l'idée des obstacles causés par l'existence même de ces connaissances premières[16]. On voit alors que l'erreur prend sa place « naturelle » dans ces nouvelles approches et que les situations-problèmes présentées aux élèves constituent un levier important pour faire évoluer leurs représentations et leurs procédures.
- Ces dernières théories sur l'apprentissage ont été reprises et complétées par l'idée que l'appropriation collective des connaissances pouvait favoriser les acquis individuels par le rôle des confrontations, des productions d'écrits en particulier.

Depuis un vingtaine d'années, de nombreux chercheurs on travaillé sur les conditions d'élaboration, de mise en place, de gestion de situations permettant la construction, par le sujet, du savoir visé par l'enseignant.

13. Socrate : *Theetete.*

14. J.-J. Rousseau : *L'Émile*, livre III.

15. Behaviorisme : étymologie : de l'anglais behavior qui signifie comportement. C'est au psychologue J.-B. Watson (1878-1958) que l'on doit ce nom. Le behaviorisme est une théorie de la psychologie qui veut promouvoir la psychologie au rang de science objective en lui assignant un modèle biologique. Il propose d'établir des lois constantes reliant le stimulus et la

16. Dans *La formation de l'esprit scientifique*, Bachelard expose une liste d'obstacles qui interdisent l'approche scientifique. Il repère en particulier l'obstacle substantialiste. Voici un court extrait (pages 102-103) qui illustre cet obstacle dans le cadre d'une expérience sur l'électricité statique : « Que les corps légers s'attachent à un corps électrisé, c'est là une image immédiate – d'ailleurs bien incomplète – de certaines attractions. De cette image isolée, qui ne représente qu'un moment du phénomène total et qui ne devrait être agréée dans une description correcte qu'en en fixant bien la place, l'esprit préscientifique va faire un moyen d'explication absolu, et par conséquent immédiat. Autrement dit, le phénomène immédiat va être pris comme le signe d'une *propriété substantielle* : aussitôt toute enquête scientifique sera arrêtée ; la réponse substantialiste étouffe toutes les questions. C'est ainsi qu'on attribue au fluide électrique la qualité « glutineuse, onctueuse, tenace. (...) Si l'on n'intériorisait pas cette métaphore, il n'y aurait que demi mal ; on pourrait toujours se sauver en disant qu'il ne s'agit pas là que d'un moyen de traduire, d'exprimer le phénomène. Mais, en fait, on ne se borne pas à décrire par un mot, on explique par une pensée. On pense comme on voit, on pense ce qu'on voit : une

.4 Premiers concepts de didactique

Des recherches se sont développées, ont établi des résultats qui permettent de mieux comprendre les phénomènes d'enseignement des mathématiques. Ainsi s'est constituée une science nouvelle appelée didactique des mathématiques. Elle propose des méthodes et des outils pour analyser des faits, mieux identifier et prévoir des phénomènes, pour construire des séquences de classe.

Comme toute science, elle élabore des concepts, elle se dote d'un vocabulaire précis qui permet d'identifier les objets dont elle se sert.

Dès maintenant, précisons quelques mots utilisés dans le champ de la didactique en commençant par reprendre une définition de la didactique des mathématiques empruntée à l'*Encyclopaedia universalis*.

> **« La *didactique des mathématiques* étudie les processus de transmission et d'acquisition de cette science, particulièrement en situation scolaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. À terme, elle se propose d'améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement, (...) assurant chez l'élève la construction d'un savoir vivant (susceptible d'évolution) et fonctionnel (qui permette de résoudre des problèmes et de poser de vraies questions). »**

Pour résumer, on peut dire que :

– la didactique des mathématiques fournit des outils professionnels à l'enseignant, tout en préservant sa liberté pédagogique ;

– elle permet d'identifier des faits, d'analyser des phénomènes d'enseignement ;

– elle permet d'analyser des productions d'élèves, d'interpréter des erreurs ;

– elle vise la construction de situations d'apprentissage et donne à l'enseignant des outils pour les réaliser.

L'approche constructiviste des apprentissages, nous l'avons vu, s'intéresse aux situations rencontrées par les élèves. Reprenons les différents sens de ce mot :

> **Une *situation* désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve un individu, les relations qui l'unissent à son milieu, et l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution.**

Exemple : une avalanche est une situation climatique.

Le jeu de la bataille navale est une situation. Il y a une règle du jeu, du matériel, une histoire du jeu, etc.

> **Une *situation* est *didactique* lorsqu'un individu (en général le professeur) a l'intention d'enseigner à un autre individu (en général l'élève) un savoir donné.**

Par exemple, hors milieu scolaire, des enfants jouent à la bataille navale. Ils peuvent acquérir des savoirs. La situation est alors non-didactique. Ce jeu peut être proposé à des élèves avec une intention d'enseignement ; dans ce cas, la situation est didactique.

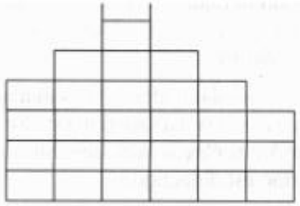
> **On appelle *situation d'apprentissage* une situation qui permet à un sujet de passer d'un état de connaissance à un autre état de connaissance.**

Ces trois définitions sont très générales. Les situations qui permettent l'apprentissage d'un savoir officiel dans une perspective constructiviste intéressent les didacticiens. Pour cela, de telles situations doivent proposer un problème. L'élève doit pouvoir y engager une stratégie de base, c'est-à-dire une stratégie déjà disponible, et construire ou reconnaître la ou les stratégie(s) optimale(s) qui correspondent au savoir visé par le professeur. L'apprentissage consiste alors en des changements de stratégies identifiés par les élèves. Ces situations peuvent comporter une phase d'action, permettre des débats, nécessiter des preuves, des démonstrations sur la base d'un langage commun, permettre des rétroactions accessibles au sujet sans l'aide ou l'intervention de l'enseignant. Le professeur est donc amené à fabriquer des situations dans lesquelles le savoir visé est la stratégie optimale. Mais dans la mise en place de la situation, pour que l'enjeu intellectuel existe pour les élèves, son intention d'enseignement ne peut pas être dévoilée. C'est un exercice important et difficile !

> **On appelle *situation a-didactique* la part de la situation didactique dans laquelle l'intention d'enseignement n'est pas explicite au regard de l'élève.**

Dès lors, celui-ci a un but à atteindre mais ne sait pas a priori comment. C'est à lui de prendre des décisions, d'engager des stratégies, d'évaluer leur efficacité... On mesure l'importance de la présence de rétroactions.

L'enseignant peut par exemple proposer un jeu similaire au jeu de la bataille navale. Le jeu se joue à deux. Les élèves savent jouer à la bataille navale traditionnelle. Le professeur propose des grilles différentes pour que le codage ABCD..., 1234... ne soit pas utilisé d'emblée sans être ressenti comme nécessaire par les élèves.



exemple de grille

Très vite se pose la question de l'exploration du quadrillage et d'un repérage commun. Le professeur fait l'hypothèse que les élèves élaboreront un codage (lignes et colonnes ou tout autre système). Il construit ainsi une situation a-didactique, à partir du jeu initial, en modifiant les règles pour optimiser l'apparition de stratégies mettant en œuvre le savoir visé. Comment faire pour que le problème qu'a inventé l'enseignant devienne le problème que va chercher à résoudre l'élève ? Pour reprendre un vieux terme de droit adapté à la question de la transmission des savoirs : comment faire la dévolution[17] d'une situation à un élève ?

On appelle *dévolution d'une situation* a-didactique l'ensemble des conditions qui permettent à l'élève de s'approprier la situation : enjeu intellectuel et contexte favorable.

« La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, (consigne, règles, but, état final...) mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité, du résultat qu'il doit rechercher[18]. »
Bien souvent la consigne du maître ne suffit pas à réaliser la dévolution de la situation. Ainsi des temps de découverte de matériel, de jeu libre,... sont souvent nécessaires.
Lorsqu'on demande à des élèves de grande section ou de C.P. d'aller chercher en un seul voyage des objets conformes à une liste donnée, la dévolution de la situation comprend des phases au cours desquelles les enfants peuvent faire plusieurs voyages afin de leur permettre de bien intégrer les consignes. Malgré tout, on rencontre des élèves qui exécutent ce travail uniquement pour faire plaisir au professeur.
La dévolution de la situation fait appel à la motivation des élèves : ils acceptent le jeu que l'on propose. Elle ne peut être réduite à cela. Il faut que les élèves aillent au-delà du jeu, recherchent des stratégies gagnantes, soupçonnent un enjeu de savoir.

17. Dévolu : terme de jurisprudence. Qui est transporté, transféré, échu, acquis par droit. Dévolution : Attribution des biens à une ligne successorale par suite de l'extinction ou de la renonciation de l'autre. (*Littré*.)

18. G. Brousseau : Actes de l'université d'été d'Olivet, 1988, p. 89.

L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE EN CLASSE

2

L'observation des faits d'enseignement est une activité complexe pour laquelle il faut se former. Entrons dans une classe de l'école primaire pendant une séquence de mathématiques. Le professeur organise le travail, les élèves répondent aux sollicitations. Mais que retenir en tant qu'observateur ? Quelles informations recueillir, quelles analyses conduire ? La réponse ne va pas de soi. L'apprentissage de l'observation des faits d'enseignements permet de mettre en évidence des phénomènes dont l'étude est l'objet même de la didactique.

Étudions une séance de mathématiques à travers la transcription qui en a été faite. La leçon a été filmée avec une caméra vidéo, les échanges dans un groupe de deux élèves, Julien et Élise, ont été enregistrés avec un magnétophone. Le tout a été retranscrit mot pour mot sur papier. Tout observateur, en prenant des notes, effectue déjà un filtrage et ne peut donc restituer une chronique aussi précise. Or, ce n'est bien souvent qu'après coup que l'on peut se rendre compte si telle ou telle remarque était importante pour l'analyse de la séquence.
À l'issue de cette lecture une liste de questions et des éléments de réponse sont proposés. Cette liste donne une idée de l'étendue des interrogations qui peuvent surgir de l'observation des faits d'enseignement.

2.1 UNE SÉANCE DE MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

La transcription qui suit relate une séance de 20 mn dans une classe de C.M.1[19] ainsi que les échanges entre deux élèves (Julien et Élise) au cours de ce moment.

19. Cette leçon est inspirée du travail d'observation « Étude en Didactique des Mathématiques : observation, leçon du 10 janvier 1991 », M.C. Chevalier, IREM de Bordeaux, 1991.

9 h 30

Installation des élèves

LE MAÎTRE : Vous allez travailler par groupes de 2. Je vais vous présenter une petite situation sur laquelle vous allez travailler, que vous allez devoir trouver sur feuille. Je vous présente le texte, je ne l'écris pas au tableau. J'écris juste les nombres qui vont vous être utiles.
Un bricoleur veut fabriquer un banc en planches de deux virgule neuf mètres de long.

Il écrit au tableau : un banc de 2,9 m de long.

Un banc de deux virgule neuf mètres de long. Est-ce que tout le monde sait comment se construit un banc ?

LES ÉLÈVES : Non !

LE MAÎTRE : Il choisit des planches qu'il met bout à bout. Donc pour faire ce banc, il dispose de cinq planches dans une remise mais évidement il ne veut pas aller chercher et transporter des planches qu'il n'utilisera pas. Il va donc choisir celles qui conviennent le mieux pour réaliser ce banc. Alors les cinq planches, je vous donne les longueurs :

Il écrit : 5 planches : 1 m ; 1,57 m ; 1,1 m ; 1,33 m ; 0,3 m.

Alors votre travail, c'est d'essayer d'aider ce monsieur à trouver quelles sont les planches qui, mises bout à bout, vont donner cette longueur de deux virgule neuf mètres.

Il montre 2,9 m.

UN ÉLÈVE : Mais, on peut en prendre plusieurs ?

LE MAÎTRE : Est-ce qu'on peut n'en prendre qu'une seule. Yann ? Non, bien entendu, on en prend plusieurs. Donc, c'est à vous de trouver quelles sont les planches et bien sûr combien il en faut.

UN AUTRE ÉLÈVE : Mais, il y en a plusieurs de chaque ou une seule de chaque ?

LE MAÎTRE : Il y a une seule planche de chaque longueur. Il n'y a que cinq planches.

Il montre les mesures écrites au tableau.

UN AUTRE ÉLÈVE : Est-ce qu'il peut les couper. .

LE MAÎTRE : Non, il n'a pas le droit de les couper. Il utilise les planches tel quel.

9 h 37

LE MÊME ÉLÈVE : J'ai trouvé le résultat !

LE MAÎTRE : Bon, mais… Vous allez travailler par groupes. il faut que chaque groupe soit capable d'expliquer comment il a fait. C'est surtout ça qui est votre travail. Bien entendu vous pouvez… si vous avez trouvé déjà, et bien tant mieux mais vous devez être capable d'expliquer tout seul, enfin par groupe, un de chaque groupe doit être capable d'expliquer la méthode qu'il a utilisée pour trouver, vous travaillez à deux.

Distribution des feuilles

Le maître fait l'hypothèse que les enfants vont utiliser spontanément leur savoir relatif aux fractions décimales :

$$1{,}57 = 1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$$

$$1{,}33 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$$

$$\text{donc } 1{,}57 + 1{,}33 = (1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}) + (1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100})$$

$$1{,}57 + 1{,}33 = (1 + 1) + (\frac{5}{10} + \frac{3}{10}) + (\frac{7}{100} + \frac{3}{100})$$

$$1{,}57 + 1{,}33 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{10}{100}$$

$$1{,}57 + 1{,}33 = 2 + \frac{9}{10}$$

$$1{,}57 + 1{,}33 = 2{,}9$$

Entre eux

ÉLISE : On va essayer un mètre… non, ça ne va pas… déjà avec un mètre et zéro trois…

Julien écrit sur son cahier : 1 m + 0,3 = 1,3

Élise écrit la même chose.

ÉLISE : Non, ça va pas parce que si tu fais un mètre plus… ça fait un mètre trois…

Elle écrit : 1,3 + 1,1 = 2,4

JULIEN : Après deux mètres quatre…

ÉLISE : Pour faire deux mètres neuf… attends… si on fait un mètre trente-trois plus un mètre… non, deux mètres trente-trois… ça va pas.

9 h 43

LE MAÎTRE : Il y a plusieurs méthodes pour trouver, il y a plusieurs méthodes. Vous pouvez trouver plusieurs méthodes et voir si elles donnent le même résultat par exemple.

9 h 44

Entre eux

ÉLISE : On va essayer un mètre trente-trois, non un virgule trente-trois je veux dire, un virgule trente-trois mètres, c'est bon…

JULIEN : Moins…

ÉLISE : On ne peut pas couper !

JULIEN : Ah, oui !

ÉLISE : Plus… Qu'est-ce qui pourrait aider ?

JULIEN : Zéro trois.

ÉLISE : On va essayer, parce qu'après…

JULIEN : Ça va faire trente-trois, heu, trente-six. Non, ça va pas trente-six, c'est trop grand parce que… Ah non, un mètre trente-six !

ÉLISE : Si ça fait un mètre trente-six, ça fait plus… (*il barre*).

JULIEN : Il faudrait que ça fasse deux mètres neuf…

ÉLISE : Ha ça… Attends, attends un mètre cinquante-sept, un mètre,

Entre eux

JULIEN : Un mètre cinquante-sept plus…

ÉLISE : Zéro trois, ça fait un mètre soixante… non !

Elle écrit : $1{,}57 + 0{,}3 = 1{,}60$

JULIEN : Combien t'as trouvé ?

ÉLISE : Non, là c'est faux, non, non, non, c'est faux, c'est faux, on ne peut pas… un mètre cinquante-sept plus zéro trois ça fait un mètre soixante…

JULIEN : Un mètre cinquante-sept plus zéro trois… si tu fais…

ÉLISE : Non, non… un virgule cinquante-sept plus zéro virgule trois égale un virgule soixante…

9 h 45

LE MAÎTRE : Allez, qui est capable ? On pose les stylos !

JULIEN : On n'a rien trouvé !

Maintenant c'est fini la recherche et on va écouter les solutions proposées. Ça y est ? Richard ? On y est ? Paul-Éric ? Qui a trouvé quelque chose et veut venir l'expliquer ? Alors, quel groupe commence ? Cédric ? Allez, tu passes au tableau, tu viens nous expliquer ce que tu as fait, fort, pour tout le monde.

Il donne une craie à Cédric.

CÉDRIC : Alors, je ne trouvais pas au début et ensuite je me suis dit qu'en prenant les deux plus grands nombres, je pourrais trouver un résultat. Un mètre cinquante-sept et un mètre trente-trois, ça donne deux mètres quatre-vingt-dix.

LE MAÎTRE : Comment ça, un mètre cinquante-sept et un mètre trente-trois ? C'est-à-dire ?

CÉDRIC : J'ai fait une addition.

LE MAÎTRE : Ha, alors, tu nous montres comment tu as fait cette addition.

Cédric écrit sans commentaire :

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ 1{,}57 \\ +\,1{,}33 \\ \hline 2{,}90 \end{array}$$

LE MAÎTRE : Laissez le faire !

Il cache avec la main le 0.

ÉLISE : Ha, ouais ! Elle est bien !

LE MAÎTRE : Bon, mais est-ce que tu peux expliquer aux autres pourquoi tu as fait une opération comme ça ? Parce qu'on ne les a jamais vues les additions comme ça. Pourquoi tu as additionné ce 7 avec ce 3 ? Ce 5 avec ce 3 ? Ce 1 avec ce 1 ?

Il montre les chiffres au tableau.

CÉDRIC : Ici, il y avait une virgule. Il faut mettre les virgules en face.

Il montre 1,57 puis l'opération posée.

LE MAÎTRE : Ha ! Il faut mettre ! Qui t'as dit qu'il fallait mettre – chut – est-ce qu'on l'a dit ça en classe ? Non ! Chut…

CÉDRIC : La virgule représente le mètre.

Entre eux

ÉLISE : Oui, voilà !

JULIEN : Qu'est-ce qu'il dit ?

ÉLISE : Oui !

LE MAÎTRE : Ha ! Toi tu penses que la virgule, ici, représente le mètre donc qu'est-ce que tu t'es dit ensuite ? Si la virgule représente le mètre, que représentent les autres chiffres ?

Entre eux

JULIEN : Et bien, les décimètres !

ÉLISE : Les centimètres !

JULIEN : Dé - ci - mètres !

ÉLISE : D'accord !

CÉDRIC : Cinq les décimètres.

LE MAÎTRE : Oui et…

CÉDRIC : Sept centimètres.

LE MAÎTRE : Oui et dessous…

CÉDRIC : Un mètre, trois décimètres, heu, trois décamètres, déci…

LE MAÎTRE : Décimètres !

CÉDRIC : Et trois centimètres.

LE MAÎTRE : Et alors, tu as ajouté ? Qu'est-ce que tu as fait alors ?

CÉDRIC : J'ai additionné !

LE MAÎTRE : Les…

CÉDRIC : Un mètre cinquante-sept et un mètre trente-trois, ça m'a donné deux mètres quatre-vingt-dix.

LE MAÎTRE : Bon, est-ce que tout le monde a bien compris la méthode utilisée par Cédric ?

ÉLISE et JULIEN : Oui, oui !

LES ÉLÈVES : Oui…

LE MAÎTRE : Paul-Éric nous dit que c'est la plus facile. Pas forcément. Dis-moi, Cédric, qui c'est qui t'a appris. Tu savais à l'avance ou bien tu as trouvé tout de suite ?

LE MAÎTRE : Qui est-ce qui sait déjà faire ça ?
Une douzaine de doigts se lèvent.
Qui ne sait pas ? Qui n'a jamais fait ça avec des virgules ? Jamais on n'a fait une addition avec des virgules en classe ?... Qui est-ce qui n'a jamais fait non plus ?
Aucun doigt ne se lève, les enfants se regardent.

9 h 50

■ Étude des faits observés

En reprenant le texte ci-dessus nous pouvons relever des faits et poser des questions qui nous auraient sans doute échappées lors d'une observation en temps réel.

Exercice traité

1. *Nous avons des indications sur l'heure, le temps qui s'écoule. Peut-on qualifier les différents moments ?*
2. *L'organisation de la classe par groupes de deux élèves est-elle importante ici ?*
3. *Le maître emploie le mot « situation » et non le mot « problème » ou « exercice ». Y a-t-il une raison à cela ?*
4. *Il annonce qu'il n'écrira pas le texte au tableau mais seulement « les nombres qui vont être utiles ». En fait il écrit également les mots « banc », « planches »...*
5. *Y a-t-il une différence de sens entre « deux virgule neuf mètres » et « deux mètres neuf » ?*
6. *Quel est le rôle joué par toutes les questions posées par les élèves après la lecture de l'énoncé ? Sont-elles de même importance ?*
7. *La remarque d'un élève annonçant qu'il a trouvé le résultat est-elle ignorée par le maître ? Par les autres élèves ?*
8. *Comment les élèves peuvent-ils savoir si leurs hypothèses de travail sont justes ?*
9. *Quelle est la tâche des élèves ? Trouver les planches que le menuisier doit employer ? Expliquer la méthode utilisée ? Qu'est-ce qu'une « méthode » pour un élève ?*
10. *Comment comprendre la phrase de Julien « Non, ça va pas trente six, c'est trop grand... » ?*
11. *Qu'aurait écrit Élise à la suite de 1,33 + 0, si elle avait terminé son calcul ? Comment expliquer sa remarque « Là, c'est faux » ?*
12. *Peut-on expliquer les erreurs commises par Julien et Élise ?*
13. *Pourquoi Cédric a-t-il choisi les deux plus grands nombres ?*

en face » ?
15. *Que penser de la question « Si la virgule représente le mètre, que représentent les autres chiffres ? » et des explications qui suivent ?*
16. *Les élèves (en particulier Julien et Élise) ont-ils compris la méthode utilisée par Cédric ?*
17. *Que vient faire ici le frère de Cédric ?*
18. *L'hypothèse du maître (cf. page 31) est-elle valide ?*
19. *Que penser de l'« habillage » du problème ?*
20. *Pourquoi l'énoncé est-il donné oralement ?*

Les questions précédentes renvoient à des objets d'observation différents : l'enseignant, les élèves ou un élève particulier, le savoir en jeu, des considérations sur le savoir en jeu...

Éléments de réponse

1. *Le temps et les différents moments*
9 h 30 à 9 h 38 : mise en place de l'activité.
Installation des élèves, consigne et explication de la consigne, distribution du matériel.
9 h 38 à 9 h 45 : recherche du problème par les groupes d'élèves.
9 h 45 à 9 h 50 : correction par un élève au tableau sous le contrôle du maître.

2. *Organisation de la classe par groupes de 2 élèves*
Théoriquement le travail à l'intérieur d'un groupe permet aux élèves de confronter des points de vue différents, de rechercher une stratégie et de la mettre à l'épreuve.
L'organisation par groupes de 2, bien que facile à mettre en place, n'est pas pertinente ici :
– le maître ne peut pas s'intéresser à chaque groupe ;
– de ce fait chacun peut rester sur une position individuelle.
Une organisation par groupes de 4 ou 5 avec consigne de mettre au point une stratégie et d'être capable de la décrire aurait donné un déroulement différent. Les élèves auraient pu essayer de nombreuses combinaisons en se répartissant les charges de calcul. Le maître aurait pu organiser une confrontation des stratégies et un débat sur la méthode à utiliser pour résoudre le problème.

3. *Choix faits par le maître dans l'énonciation des consignes*
Le choix du mot situation plutôt que problème peut renvoyer à :
– l'histoire de la classe ;
– un choix délibéré du maître ;
– l'expression d'une incertitude quant à la terminologie à employer...

Par contre, le mot exercice n'est pas utilisé car il est généralement réservé à des applications directes de cours.

4. « Texte » écrit au tableau

Lorsque le maître annonce qu'il n'écrira que les nombres au tableau et qu'il rajoute les mots « banc » et « planches » il oscille ici entre écrire le minimum de choses (afin de ne pas surcharger le tableau) et mettre en relief les informations pertinentes.

5. Sens des expressions « deux virgule neuf mètres » et « deux mètres neuf »

La première écriture « deux virgule neuf mètres » fait appel aux nombres décimaux et utilise comme unité de mesure le mètre (on écrira 2,9 m). La deuxième « deux mètres neuf » ne fait appel qu'aux entiers et utilise le mètre comme unité de mesure associée au premier entier et laisse implicite l'unité de mesure associée au deuxième. Il y a ambiguïté : dans ce contexte on comprendra « deux mètres et neuf décimètres » (2 m 9 dm) alors que dans un autre contexte, on pourrait comprendre « deux mètres et neuf centimètres » (2 m 9 cm) ce qui correspond davantage à l'usage courant d'une telle expression.

6. Les questions des élèves après lecture de l'énoncé

Les questions des élèves permettent de construire le sens de l'énoncé du problème. Elles sont nécessaires au maître qui doit s'assurer de la compréhension de la consigne. Elles traduisent un mode de fonctionnement de la classe où poser des questions est naturel avant de se lancer dans la recherche. Elles ne signifient pas que les élèves ont des difficultés de compréhension mais au contraire qu'ils suivent parfaitement.

La première a une réponse (mathématiquement) évidente alors que les deux suivantes ont comme effet de faire préciser la consigne.

7. « J'ai trouvé le résultat »

Dans une classe, on a souvent de telles remarques. Elles proviennent généralement d'élèves qui veulent attirer l'attention sur eux. Dans ce cas là, elles sont ignorées par le maître et les autres élèves.

Plus rarement elles peuvent provenir d'un élève qui a effectivement trouvé. Elles peuvent alors déclencher une réaction de lassitude ou d'admiration chez les autres élèves. Le maître est généralement conduit, pour que l'activité puisse avoir lieu, à « faire taire l'élève » en lui demandant de garder la réponse pour lui tout en rédigeant la solution ou bien en lui proposant de chercher d'autres solutions éventuelles…

8. Savoir si l'on a juste ou non

Dans cette séquence, rien ne permet aux élèves de savoir si l'hypothèse qu'ils ont faite est juste ou non. C'est seulement l'acceptation ou le refus du maître qui servira de validation.

9. La tâche des élèves

L'enjeu, pour les élèves, est de trouver les bonnes planches, les bons nombres. Celui du maître semble être « trouver la méthode qui permet

de choisir les bons nombres ». Ce dernier est abandonné, il n'est même pas évoqué au moment de la correction. Ce constat peut nous laisser penser que le choix de la situation n'était peut-être pas adapté aux objectifs que s'était fixés le maître ou à la réalité de la classe.

10. « Trente six, c'est trop grand »

Le nombre à atteindre est 2,9. Julien exprime sans doute l'idée qu'un nombre de la forme ..,36 ne peut convenir, car 36 est trop grand par rapport à 9. Peut-on en déduire qu'il pense que 2,36 est supérieur à 2,9 ? Rien ne permet d'aller jusque-là avec cette simple remarque.

11. Élise et les calculs

Élise aurait sûrement écrit 1,33 + 0,3 = 0,36 puisqu'elle ne réagit pas aux propos de Julien. « Là c'est faux » ne remet pas en cause la somme 1,60 = 1,57 + 0,3 mais simplement le fait que ce ne sont pas les bons nombres car on n'arrive pas à 2,9.

12. Les erreurs de Julien et Élise

Elles renvoient à des conceptions erronées des décimaux. Un décimal est souvent considéré comme deux entiers séparés par une virgule ou bien comme un nouveau codage d'un nombre entier obtenu dans un nouveau système de numération où on aurait changé de groupement unité. Par exemple pour ajouter 1,57 et 0,3, la première conception[20] autorise le traitement séparé des parties entières et décimales : 1 + 0 = 1 et d'autre part 57 + 3 = 60. En « recollant » les morceaux on obtient alors 1,60.

20. Le terme de « conception » est utilisé en didactique des mathématiques selon au moins deux acceptations. Dans sa thèse « Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e » (chap. 7, IREM de Paris VII, 1992, pp. 380-381), M.-J. Perrin rappelle ces deux usages qui sont :

« Le terme "conception" est employé dans les travaux de didactique en référence à deux points de vue nettement différents bien qu'assez étroitement reliés :

– Un aspect lié au contenu et aux situations, aux problèmes qui le mettent en scène : par exemple, M. Artigue et J. Robinet examinent différentes conceptions du cercle associées à des définitions différentes ; ces définitions sont équivalentes mais correspondent à des points de vue différents ». On pourrait dire : il y a plusieurs façons de concevoir (en terme de définition dans le savoir savant) un cercle. Cet aspect est utilisé dans l'analyse, a priori, d'une ingénierie didactique. Par exemple, Harrisson Ratsimba Rajohn (*RDM*, vol 3/1, 1982, pp. 65 à 113) a mis en évidence deux conceptions différentes de rationnels, la commensuration et le fractionnement de l'unité qui correspondent à deux ensembles différents de connaissances. Dans ce cas, le didacticien se préoccupe de faire le point sur plusieurs approches (d'un même objet mathématique) aboutissant à des définitions différentes de cet objet.

– L'autre aspect se situe plutôt au niveau des élèves et s'intéresse aux conceptions justes ou fausses qu'un élève est susceptible de mettre en œuvre dans une situation donnée pour résoudre un problème. Il est utilisé dans l'analyse des erreurs des élèves. Ces conceptions erronées des élèves ont, en général une parenté avec des conceptions justes mais dans un autre domaine de validité par exemple.

M.-J. Perrin écrit ensuite : « les deux aspects dont nous avons parlé sont étroitement reliés parce que les conceptions que les élèves mettent en œuvre dépendent des problèmes qu'ils traitent et des situations où ils sont placés ». L'auteur note ensuite que « chez les élèves peuvent coexister des conceptions erronées, voire contradictoires sans que l'élève soit conscient de la contradiction, ou en tous cas, en tienne compte ».

Avec la seconde conception, l'élève considère que le nombre 1,57 peut s'écrire 157 ; que le nombre 0,3 peut s'écrire 03 ou 3. Il ajoute alors ces deux entiers et obtient 160. Pour retrouver « la forme » initiale, il introduit une virgule en respectant l'ordre de grandeur et obtient 1,60.

***13.** La méthode de Cédric*

Pourquoi le choix des deux plus grands nombres ? Seul Cédric pourrait le dire et encore... On peut faire l'hypothèse que Cédric a fait des calculs, en cherchant à obtenir 9 comme dernière décimale, qui aboutissaient toujours à des nombres plus petits que 2,9. Fort de cela, il a peut-être changé de stratégie en cherchant à obtenir une somme importante et donc en choisissant d'emblée des nombres grands.

***14.** « Il faut mettre les virgules en face »*

Ce phénomène est courant chez les élèves qui cherchent des lois strictes à appliquer, des lois sécurisantes.

Cette affirmation de Cédric fait penser à une règle (« il faut ») qu'il aurait apprise ou constatée. Elle est exprimée dans son langage : l'expression « en face » voulant dire l'une en dessous de l'autre

***15.** « Si la virgule représente le mètre, que représentent les autres chiffres ? »*

La virgule est-elle un chiffre ? Cette question laisse pointer des confusions, une mauvaise maîtrise du savoir mathématique en jeu. Les explications qui suivent sont tout aussi confuses et les enfants se trouvent entraînés dans ce discours. On trouve là un effet de la méthode utilisée par le maître : c'est « l'effet Topaze »[21]. Le maître fait dire aux élèves ce qu'il veut. Il a besoin, à ce moment-là, de récupérer la situation qui a failli lui échapper à cause de Cédric qui savait déjà ajouter des nombres à virgule.

***16.** Julien et Élise jugeant la méthode de Cédric*

Ce que présente Cédric convient tout à fait à Julien et Élise. Ils acceptent les explications présentées car ils perçoivent une logique, des régularités dans l'exposé de Cédric. On ne peut pas pour autant conclure qu'ils ont compris la méthode utilisée.

***17.** Le frère de Cédric*

A-t-on le droit d'exposer à l'école des connaissances acquises à l'extérieur ? C'est une question qui se pose tout au long de la scolarité. Par cette affirmation, Cédric fait référence à une autorité extérieure qui détiendrait la vérité.

***18.** L'hypothèse du maître*

Dans ce que nous montre la transcription : travail de Julien et Élise puis méthode utilisée par Cédric, on ne voit à aucun moment des élèves avoir recours aux fractions décimales. On peut donc penser que le maître a mal évalué les connaissances disponibles.

21. Cf. définition de l'« effet Topaze », p. 73.

***19.** L'« habillage » du problème*

Le vocabulaire employé est familier aux enfants mais la mise en scène apparaît quelque peu artificielle : un banc de 2,9 m, plusieurs planches...

***20.** L'énoncé oral*

La présentation orale d'une situation évite les difficultés de lecture et centre l'activité des élèves sur l'objectif mathématique.

Les différentes questions abordées dans cette analyse peuvent être réorganisées à l'aide d'un modèle.

2.3 ANALYSE À L'AIDE D'UN MODÈLE

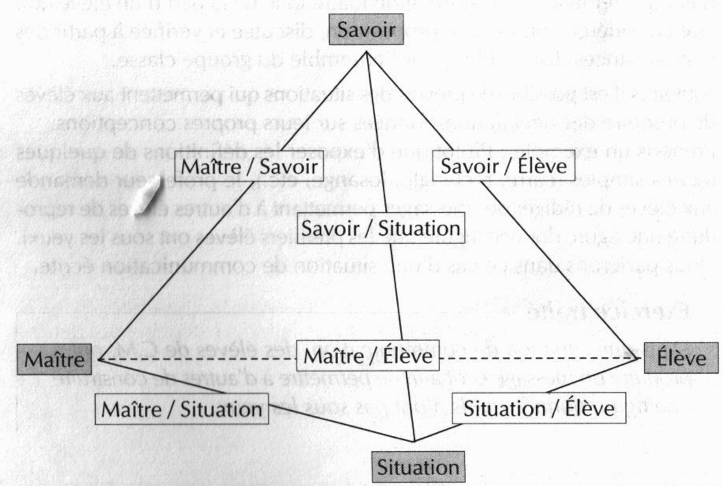
Les différentes questions de l'analyse précédente renvoient à des objets différents.

Par exemple, la question 5. est une interrogation sur le savoir en jeu alors que la question 7. renvoie aux relations entre le maître et les élèves.

Notons qu'une formation en pédagogie générale ne permet pas de répondre à la question 5. ni même d'envisager une telle question.

Il est intéressant de réorganiser les faits observés afin d'identifier les différents paramètres qui interviennent dans une situation puis d'évaluer l'espace de liberté de l'enseignant dans ses décisions.

Le schéma[22] ci-dessous sépare « le savoir », « le maître », « l'élève » (ou un groupe d'élèves) et la « situation » et permet d'envisager les interrelations entre ces pôles.



22. G. Brousseau a proposé une approche systémique de la relation didactique. On pourra se reporter à son article sur « Le contrat didactique : le milieu », *RDM*, vol. 9/3, La pensée sauvage, janvier 1990.

Exercice (corrigé page 211)

Compléter le schéma en inscrivant le numéro des questions qui renvoient plus particulièrement à un des pôles d'observation ou à des interrelations entre ces pôles.

Un modèle de ce type peut constituer une aide pour l'observation mais aussi la préparation d'une séquence et l'interprétation des réactions des élèves.

2.4 Rapport au savoir

Dans la séquence que nous venons d'étudier, l'observateur assiste à l'apport d'une information (par Cédric) qui n'est pas traitée comme une hypothèse mais simplement admise comme vraie. Même si le thème se réfère à des savoirs mathématiques (décimaux), l'activité pratiquée n'est donc pas de nature mathématique.

Cette conclusion un peu brutale nous amène à aborder l'idée de rapport au savoir[23].

L'école doit permettre à chacun d'exercer une activité mathématique c'est-à-dire poser des hypothèses, les valider[24] ou les invalider, identifier le savoir de référence.

Ainsi, un élève en classe de mathématiques peut faire état de savoirs personnels acquis à l'extérieur mais la classe n'est pas une simple chambre d'enregistrement. Toute affirmation inattendue de la part d'un élève doit être considérée comme une proposition, discutée et vérifiée à partir des connaissances disponibles pour l'ensemble du groupe classe.

Toutefois il est possible de prévoir des situations qui permettent aux élèves de produire des déclarations fondées sur leurs propres conceptions.

Prenons un exemple : Plutôt que d'exposer les définitions de quelques figures simples (carré, rectangle, losange, etc.), le professeur demande aux élèves de rédiger des messages permettant à d'autres élèves de reproduire une figure donnée (figure que les premiers élèves ont sous les yeux). Nous parlerons dans ce cas d'une situation de communication écrite.

Exercice traité

Dans une situation de communication, des élèves de C.M. ont à produire un message écrit afin de permettre à d'autres de construire une figure donnée qu'ils n'ont pas sous les yeux.

23. Cf. Y. Chevallard : « Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique », *RDM*, vol. 12/1, 1992.

24. Valider : établir la vérité ; alors qu'évaluer consiste à porter une appréciation, un jugement de valeur.

Voici deux messages :

M1 : « C'est une figure à 4 côtés. Il y a un angle en haut, un en bas et 2 de chaque côtés. »
M2 : « Notre forme a 4 côtés égaux. C'est un rectangle déformé »

1. Le vocabulaire utilisé est-il celui attendu par l'école ?
2. Reconnaître le type de figures décrites.
3. En quoi ces messages informent-ils sur la façon dont les élèves appréhendent ces figures ?

Éléments de réponse

1. Le vocabulaire utilisé renvoie à deux registres différents :
– des termes techniques ou mathématiques comme angle, rectangle ;
– des termes du langage courant comme forme, déformé…

Les termes techniques n'ont pas tous le sens que leur accordent les mathématiciens. Ainsi « angle » est utilisé dans le sens de « coin » et non de secteur angulaire, c'est-à-dire un domaine plan limité par deux demi-droites de même origine.

2. M1 décrit un losange alors que M2 décrit un parallélogramme.

3. À travers le message M1 apparaît l'idée qu'un losange est toujours présenté de la même manière, qu'il occupe une position privilégiée dans le plan, et donc qu'il se définit par son rapport au plan (en bas, de chaque côté.).

Les productions écrites des élèves nous éclairent sur la façon dont ils conçoivent les figures géométriques et formulent ce qui, de leur point de vue, les caractérise. Le travail du professeur consiste donc à concilier les conceptions des élèves avec son projet d'enseignement, en construisant des situations adaptées. Nous dirons alors qu'un des enjeux importants de l'activité mathématique en classe consiste à se fonder sur les connaissances[25] de base des élèves en vue de produire un savoir officiel.

25. *Connaissances et savoir.* Nous empruntons à J. Centeno et G. Brousseau les définitions suivantes :
Connaissances : « Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. »
Savoir : « Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissances ou de savoirs et la production de nouveaux savoirs. Dans certaines situations (action formulation ou preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir, ou les deux. »
F. Conne dans l'article : « Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique », *RDM*, vol. 12/2.3, 1992, p. 225, précise le critère qui sépare l'ordre du savoir de celui de la connaissance. Se reporter au paragraphe : Rapport entre savoirs et connaissances, pp. 149-150.

LE SAVOIR EN JEU

3

Les instructions officielles définissent les programmes d'enseignement des mathématiques. Mais comment sont choisis les savoirs que l'on retrouve à l'école ? Sont-ils là de façon immuable ou bien ont-ils évolué au fil du temps ? Le savoir savant est répertorié dans les théories mathématiques mais pour pouvoir être enseigné à tous les niveaux de scolarité, il subit des transformations.

3.1 DIFFÉRENTES APPROCHES POUR UN MÊME SAVOIR

Nous allons montrer en quoi un savoir très clairement répertorié en mathématiques peut revêtir des aspects complètement différents selon la population scolaire à laquelle il est enseigné.

Ce point intéresse tout enseignant :

– du primaire qui doit apercevoir ce que sera un objet de savoir particulier pour ses élèves quelques années plus tard ;

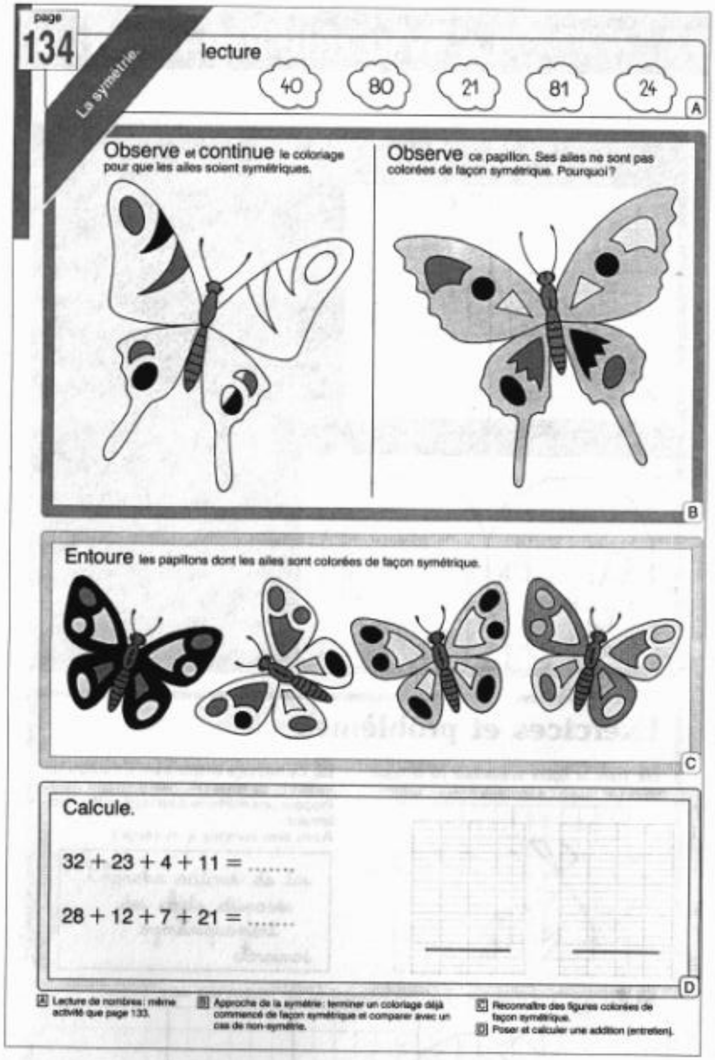
– du secondaire pour pouvoir élargir le champ de connaissances des élèves qu'il reçoit.

Nous allons donc étudier la symétrie axiale à travers différents niveaux d'enseignement à l'école, au collège et au lycée.

Exercice traité

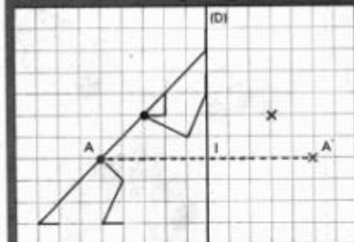
L'objet « symétrie axiale » figure dans le texte officiel de 1991 « les cycles à l'école primaire ». Le savoir savant correspondant est « symétrie orthogonale plane ». On peut repérer les différences entre le savoir savant et le savoir enseigné à l'école primaire, au collège et au lycée. Analyser le savoir tel qu'il apparaît dans les six extraits de manuels scolaires ci-après.

Extrait 1 – *J'apprends les maths*, CP, RETZ, 1991



LA SYMÉTRIE PAR RAPPORT

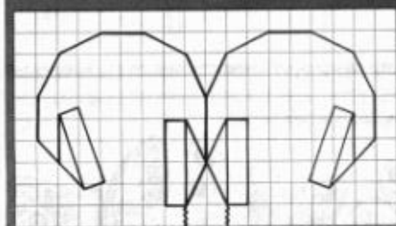
Activités préparatoires



■ • Quel est le déplacement le plus court pour passer du point vert à la droite (D) représentée en rouge ?
Effectue ce déplacement.
À partir du point atteint sur la droite rouge, effectue un déplacement identique.
Tu atteins la croix verte. I est l'intersection de AA' et (D). Compare IA et IA'.

• Fais de même avec le point noir, puis avec chacun des points de la figure dessinée.
Relie entre eux les points obtenus. Que remarques-tu ?

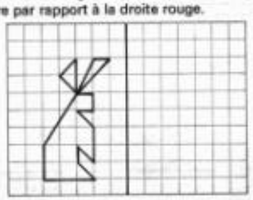
Comment nomme-t-on la transformation qui permet de passer d'une figure à l'autre ?



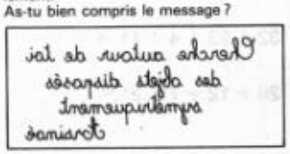
■ Ces deux figures sont-elles symétriques ?
Explique pourquoi.
Si elles sont symétriques, trace l'axe de symétrie, en rouge.

Exercices et problèmes

■ Trace la figure symétrique de la figure noire par rapport à la droite rouge.



■ Ce message difficile à lire, a été écrit par symétrie du texte original.
Propose une méthode pour le déchiffrer facilement.
As-tu bien compris le message ?



■ Poursuis cette frise, par symétries successives par rapport aux axes rouges.

À UNE DROITE

Exercices et problèmes (suite)

■ Pour chaque paire de dessins, recherche s'il y a symétrie. Si oui, trace l'axe de symétrie en rouge. Justifie ta réponse.

■ Imagine un moyen de représenter le symétrique du point bleu par rapport à l'axe de symétrie rouge. Décris et explique ta démarche.
Reproduis la figure entière par rapport à l'axe de symétrie rouge.

■ Ces deux figures sont-elles symétriques ? Si oui, trace l'axe de symétrie.

■ Voici une collection de logos. Cherche les axes de symétrie quand il y en a.

■ Observe chacune de ces cartes. Indique, pour chacune d'elles, le nombre d'axes de symétrie.

■ Plie une feuille en deux, puis en deux, comme indiqué. Découpe-la selon un motif de ton choix. Déplie la feuille. Que remarques-tu ? Marque les axes et le centre de symétrie en rouge.

Mémento

• La figure noire et la figure verte ont :
– la **même forme** ;
– les **mêmes dimensions** ;
MAIS leur **orientation est différente.**
La figure verte est retournée par rapport à la droite rouge.

• La transformation qui permet de passer d'une figure à l'autre est une **symétrie par rapport à la droite rouge.**

• La droite rouge est l'**axe de la symétrie.**

• Chaque point de la figure bleue et son symétrique sont situés à égale distance de l'axe de symétrie.
AI = A'I ; BJ = B'J

52 GÉOMÉTRIE : symétrie par rapport à un axe

Savoir tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe quelconque.

calcul rapide

Complète les tableaux suivants :

a.

d	10		100		1 000	
	q	r	q	r	q	r
328	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2 736	.....	.....	.....	.....	.....	.....

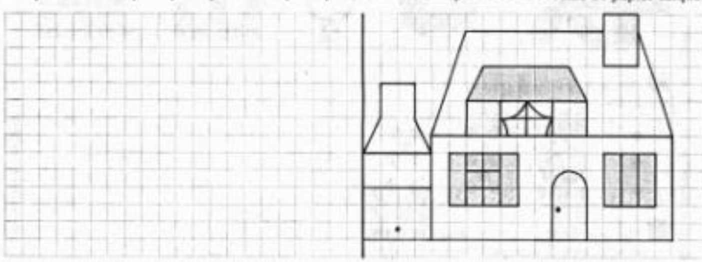
b.

d	10		100		1 000	
	q	r	q	r	q	r
14 628	.....	.....	.....	.....	.....	.....
103 036	.....	.....	.....	.....	.....	.....

découverte

Dans le *Quartier des Prés*, l'architecte a conçu des maisons jumelles, parfaitement symétriques de part et d'autre du mur qui sépare les garages (les maisons sont accolées l'une à l'autre par ce mur). François a pris une photo de sa maison et de celle de son voisin.

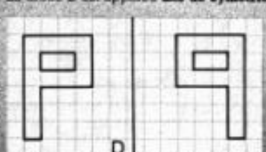
Complète le dessin pour qu'il reproduise la photo prise. Utilise le transparent ou une feuille de papier-calque.



maison de son voisin *maison de François*

aide-mémoire

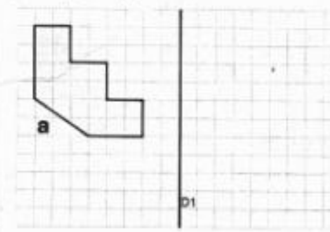
La figure rouge est **symétrique** à la figure noire par rapport à la droite D. La droite D est appelée **axe de symétrie**.



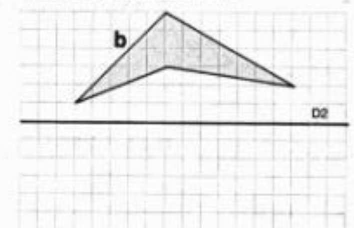
L'axe de symétrie peut prendre n'importe quelle orientation :

EXERCICES

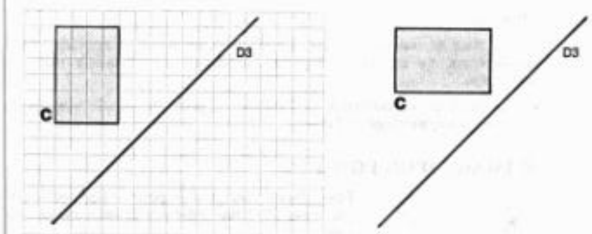
1 Reproduis la figure **a** et construis son symétrique par rapport à l'axe D1.



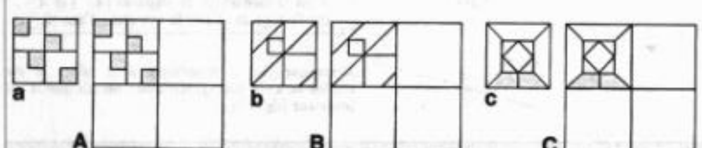
2 Reproduis la figure **b** et construis son symétrique par rapport à l'axe D2.



3 Reproduis la figure **c** et construis son symétrique par rapport à l'axe D3.



4 Chaque carreau reproduit plusieurs fois permet d'obtenir un carrelage. Reproduis et complète par symétrie les carrelages **A**, **B** et **C** à l'aide des carreaux **a**, **b** et **c**.



Extrait 4 – *Puissance math*, Mathématiques 6ᵉ, Bordas, 1990

SAVOIR

1. Transformation

Effectuer une transformation c'est exécuter un programme parfaitement déterminé permettant d'obtenir une figure F' à partir d'une figure F donnée. La figure F' ainsi obtenue s'appelle **transformée** ou **image** de F par cette transformation.

2. Symétrie axiale

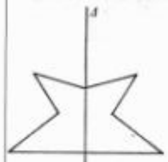


Fig. 9

■ AXE DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

La droite Δ est axe de symétrie pour la figure F si, par pliage suivant Δ, les deux parties de la figure F se superposent (fig. 9).

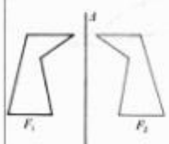


Fig. 10

■ FIGURES SYMÉTRIQUES

Deux figures F_1 et F_2 sont symétriques par rapport à la droite Δ si la droite Δ est axe de symétrie de la figure constituée par F_1 et F_2 (fig. 10).

DÉFINITION

Quand deux figures F_1 et F_2 sont symétriques par rapport à la droite Δ, on dit que chacune d'elles est transformée de l'autre par la symétrie d'axe Δ.

Attention !

• A la place de «**symétrie d'axe Δ**», on peut dire aussi : «**symétrie orthogonale d'axe Δ**» ou «**symétrie axiale d'axe Δ**» ou «**symétrie par rapport à Δ**».

• A la place de «**transformée** de l'autre», on peut dire aussi : «**image** de l'autre» ou «**symétrique** de l'autre».

■ IMAGE D'UN POINT

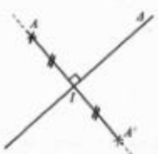


Fig. 11 $\begin{cases} (AA') \perp \Delta \\ AI = IA' \end{cases}$

Pour obtenir l'image d'un point A par une symétrie d'axe Δ, il faut effectuer le programme suivant :

• Tracer la perpendiculaire à Δ passant par A. Elle coupe Δ en I.

• Placer le point A' tel que I soit le milieu du segment $[AA']$.

Δ est la médiatrice du segment $[AA']$ et A' est l'image de A par la symétrie d'axe Δ.

Fig. 12

Remarque. Si A appartient à Δ, alors il est confondu avec son symétrique : on dit que A est **invariant** (fig. 12).

96 Transformer

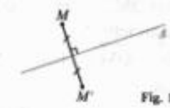
Extrait 5 – Collection Terracher, *Mathématiques 2ᵉ*, Hachette, 1990

Notions de base

I - Transformations usuelles

Dans ce paragraphe, nous rappelons les définitions relatives aux transformations usuelles : symétrie axiale, symétrie centrale, translation et rotation. (L'expression «rotation d'angle α» signifiera «rotation d'angle α dans le sens *direct*» — sens inverse des aiguilles d'une montre.)

1 - Les symétries

transformations •	symétrie axiale (ou réflexion)	symétrie centrale
un point et son image	 Fig. 1 M' est le symétrique de M par la **symétrie d'axe Δ :** • Δ est médiatrice de $[M, M']$ lorsque $M \notin \Delta$ • $M' = M$ lorsque $M \in \Delta$	 Fig. 2 M' est le symétrique de M par la **symétrie de centre I :** I est le milieu de $[M, M']$
notation	s_Δ	s_I
remarque	si M a pour image M', alors M' a pour image M on dit que M et M' sont symétriques : par rapport à Δ	par rapport à I
points invariants	tout point de Δ est son propre symétrique et il n'y en a pas d'autre	un seul point est son propre symétrique ; le centre I de la symétrie

1 Soit un losange $ABCD$. Quels sont les symétriques des points A, B, C et D :
a) Par rapport à (AC) ?
b) Par rapport à (BD) ?

2 Construire le symétrique d'un point par rapport à une droite donnée, en deux coups de compas, seulement.

3 Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Préciser les images par S_O des points A, B, C et D.

4 Construire le symétrique d'un point par rapport à un point O en utilisant seulement la règle (non graduée) et l'équerre.

256 . Les transformations

III. INVOLUTIONS AFFINÉS DE $\mathcal{E}$

1 Involutions affines de $\mathcal{E}$

a. Définition

L'application affine f de $\mathcal{E}$ est dite involutive, si :

$$\boxed{f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{(Identité sur } \mathcal{E}\text{)}}$$

p. 379

2 Recherche des involutions affines de $\mathcal{E}$

• Les applications affines involutives admettent nécessairement au moins un point double, et, pour automorphisme sous-jacent, une involution vectorielle.

• *Montrons que toute application affine* f *admettant un point double, et pour automorphisme sous-jacent une involution vectorielle* φ, *est une involution affine.*

Soit O un point double de f :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\overrightarrow{OM'}) = \overrightarrow{OM''}.$$

Puisque φ est une involution vectorielle :

$$(\varphi \circ \varphi)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} \qquad \text{donc} \qquad M'' = M.$$

Ainsi, quel que soit le point M de :

$$(f \circ f)(M) = M \qquad \text{donc} \qquad f \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$$

• **Représentation matricielle.** Soit O un point double de l'application affine involutive f, et φ l'involution vectorielle sous-jacente à f.

$\boxed{\dim \mathcal{E} = 2}$

Rappelons qu'il existe au moins une base $\beta = (\vec{i}, \vec{j})$ de E telle que la matrice associée à l'involution vectorielle φ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_i \in \{-1, +1\} \quad i \in \{1, 2\}$

Soit alors $\mathfrak{R} = (O\,;\, \vec{i}, \vec{j})$ le référentiel affine associé à cette base et au point invariant O (f (O) = O).

Le point M de coordonnées (x, y) a pour image M' = f (M) de coordonnées (x', y') et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

soit *nécessairement* :

$$x' = \varepsilon_1 x\,; \quad y' = \varepsilon_2 y$$

$\boxed{\dim \mathcal{E} = 3}$

Rappelons qu'il existe au moins une base $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E telle que la matrice associée à l'involution vectorielle φ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_i \in \{-1, +1\} \quad i \in \{1, 2, 3\}$

Soit alors $\mathfrak{R} = (O\,;\, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le référentiel affine associé à cette base et au point invariant O. Le point M de coordonnées (x, y, z) a pour image M' = f (M) de coordonnées (x', y', z') et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

soit *nécessairement* :

$$x' = \varepsilon_1 x\,; \quad y' = \varepsilon_2 y\,; \quad z' = \varepsilon_3 z$$

• *Inversement* une application affine qui, rapportée à un référentiel arbitraire, admet une représentation matricielle du type précédent est involutive. Si M" = f (M') a pour coordonnées x'', y'' et éventuellement x'', y'', z'', alors :

$$x'' = \varepsilon_1 x' = \varepsilon_1^2 x, \qquad \text{soit} \qquad x'' = x,$$

et de même : $y'' = y$ et éventuellement $z'' = z$. Donc, quel que soit le point M de $\mathcal{E}$, M" = M et f est une involution affine.

pp. 380-381

3 Involutions affines dans un plan affine

Trois cas se présentent dans un plan affine $\mathcal{E}$.

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, alors $x' = x$; $y' = y$ donc : $\forall M \in \mathcal{E} \quad f(M) = M$ $\qquad \boxed{f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}}$

2. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, alors $x' = -x$; $y' = -y$ donc : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

$s/_O$ désignant la symétrie de centre O : $\qquad \boxed{f = s/_O}$

3. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$, alors $x' = x$; $y' = -y$ (FIG. 11).

Posons : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on obtient $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} - y\vec{j}$ et $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = 2\,y\vec{j}$.

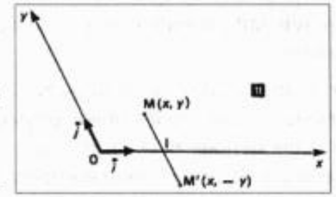
On déduit donc :

• le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ a la même direction que Δ' (axe Oy) ;

• le point I $(x, 0)$, milieu de MM' appartient à Δ (axe Ox)

et $\quad \overrightarrow{M'M} = 2\,\overrightarrow{IM}$;

• M = M' $\Leftrightarrow$ M = I ; M est invariant si, et seulement si, M appartient à Δ (axe Ox).



L'involution affine est la « *symétrie d'axe Δ de direction Δ'* » ; on la note $s_{\Delta/\Delta'}$, et :

$$\boxed{f = s_{\Delta/\Delta'}}$$

Notons que, si : $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$, $f = s_{\Delta'/\Delta}$.

Conclusion

Si $\mathcal{E}$ est un plan affine, les involutions affines f de $\mathcal{E}$ sont de la forme suivante :

$$f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\,; \qquad f = s/_O\,; \qquad f = s_{\Delta/\Delta'}.$$

pp. 381-382

2 Étude d'une isométrie négative f de $\mathcal{E}$ (FIG. 7)

a. f est une isométrie négative arbitraire de ε définie par : (A, A', s_{Δ}).

Désignons par O le milieu de AA' (confondu avec A si A = A') et par la droite qui passe par O et, est dirigée par $\bar{\Delta}$. La symétrie orthogonale s_{Δ} est une isométrie négative de ε qui admet $s_{\bar{\Delta}}$ comme isométrie vectorielle associée. Donc, à l'isométrie $(s_{\Delta} \circ f)$ de ε est associée $\quad s_{\bar{\Delta}} \circ s_{\bar{\Delta}} = e$

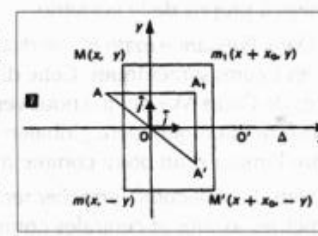
$(s_{\Delta} \circ f)$ est donc une translation plane t et $\qquad s_{\Delta} \circ f = t$.

En composant à gauche par s_{Δ}, en remarquant que $s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, on obtient : $\boxed{f = s_{\Delta} \circ t}$

Notons A_1 le symétrique de A' par rapport à Δ, c'est aussi le symétrique de A par rapport à la droite passant par O, orthogonale à Δ. D'après (1).

$$t(A) = (s_{\Delta} \circ f)(A) = s_{\Delta}(A') = A_1.$$

Le vecteur de la translation t est donc $\vec{V} = \overrightarrow{AA_1}$ et $\vec{V}$ appartient à $\bar{\Delta}$. Donc :



Une isométrie négative f est la composée d'une symétrie axiale s_{Δ} et d'une translation t de vecteur $\vec{V}$ ($\vec{V} \in \bar{\Delta}$).

p. 400

Éléments de réponse

• Dans l'activité du Cours Préparatoire, *J'apprends les maths*, sur la première image, on parle « d'ailes symétriques » alors que sur la seconde on parle « d'ailes colorées de façon symétrique ». Cette nuance est-elle voulue ?
Le titre est « la symétrie » mais plus loin on voit « approche de la symétrie ». De quel objet de savoir parle-t-on ?
On peut dire ici que : la symétrie porte sur des objets physiques puisqu'elle fait intervenir la couleur qui n'appartient pas aux objets géométriques.

• Dans *Le livre outil*, la question « Ces deux figures sont-elles symétriques ? » ignore les objets physiques. Dans le mémento on peut lire : « la figure noire et la figure verte… La transformation qui permet de passer d'une figure à l'autre est une symétrie par rapport à la droite rouge. » Les couleurs interviennent pour désigner des figures mais ne font pas partie de ces figures. On travaille sur des objets géométriques. La symétrie apparaît comme une transformation plane opérant globalement sur des figures. Le titre mentionne « symétrie par rapport à une droite », ce qui laisse penser que l'on peut définir une symétrie par rapport à autre chose. On parle d'axe mais le lien avec le mot droite ne se fait que dans le mémento. Les figures proposées sont sur papier quadrillé, les axes occupent une position bien particulière : ils sont verticaux et au centre de la feuille. On remarque qu'il est question d'« orientation d'une figure ». Cette notion n'appartient pas au monde des objets mathématiques qui parle d'orientation du plan.

• Dans *Objectif calcul*, la symétrie apparaît également comme une transformation qui opère globalement sur une figure. Le support n'est pas toujours un papier quadrillé, l'axe de symétrie apparaît parfois en position oblique.

On peut penser que deux élèves du Cours Moyen qui travaillent avec ces deux derniers manuels ne vont pas construire les mêmes connaissances à propos de la symétrie.

• Dans *Puissance math 6*^{e}, on distingue un axe de symétrie d'une figure et des figures symétriques. Cette distinction était implicite dans les exercices de Cours Moyen que nous venons d'observer. La symétrie reste une transformation qui opère globalement sur une figure mais on voit apparaître l'image d'un point comme moyen technique de construction.

• Dans la collection *Terracher seconde*, sont présentées en parallèle les symétries axiales et centrales comme transformations ponctuelles.

• Enfin, dans la collection *Riche*, qui ne correspond plus aux programmes actuels de terminale scientifique, les concepts mathématiques associés à la notion de symétrie sont les notions d'involution, d'application affine,

et d'isométrie. Il s'agit là d'un objet mathématique en relation étroite avec d'autres objets, avec une place précise dans une théorie.
À travers cette étude, on voit que la distance entre un objet d'enseignement et un objet du savoir savant dépend du niveau d'enseignement, de l'époque, des auteurs des manuels…
Ceci nous conduit à exposer un concept de didactique qui permettent d'approfondir de telles analyses. Il s'agit de la « transposition didactique ».

3.2 Transposition didactique

Le mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés. Il les réorganise, il leur donne une forme aussi générale que possible. Il fait de la « didactique pratique » qui consiste à mettre le savoir sous une forme communicable, décontextualisée.
L'enseignant fait le travail inverse du mathématicien. Il effectue une recontextualisation du savoir. Il cherche des situations qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner.
Pour faire l'objet d'un enseignement un savoir donné subit des transformations inévitables.

Y. Chevallard a mis en évidence ce phénomène et lui a donné le nom de transposition didactique.

> **« Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner. […] Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé *transposition didactique*. »**[26]

Le tableau ci-dessous montre les transformations d'un savoir depuis le sujet de recherche jusqu'à son enseignement en scolarité obligatoire :

26. Y. Chevallard : *La transposition didactique*, La Pensée sauvage, 1985, p. 39.

27. La noosphère désigne l'ensemble des personnes ou instances qui participent à la définition des programmes. Il ne faut pas y voir que le Ministère de l'Éducation Nationale. D'autres institutions participent à ces choix : académies, parents, etc.

Remarque relative aux étudiants préparant le concours de professeur des écoles :

Dans le cadre d'une analyse de documents la question : « Repérer et analyser les contenus scientifiques sous-jacents » appelle une réflexion sur le savoir savant, la forme sous laquelle il intervient dans l'activité analysée, les transformations que ce savoir a subies, c'est-à-dire une réflexion qui renvoie au concept de transposition didactique.

3.3 LE SAVOIR SAVANT

De tous temps, le mathématicien a eu pour souci de résoudre des problèmes pour lesquels il n'avait pas de réponse immédiate. Il procède par centres d'intérêts, domaines aux contours souvent flous. Il ne sait pas toujours si les résultats qu'il énonce seront ou non intéressants pour les autres mathématiciens. Pour communiquer ses résultats, il doit réorganiser son travail en particulier supprimer les fausses pistes, les réflexions jugées a posteriori inutiles. Ainsi se constituent progressivement les textes du savoir.

Le *savoir savant* est l'ensemble des connaissances socialement disponibles qui ont fait l'objet de publications scientifiques ou de communications reconnues comme valides par toute une communauté. Il est organisé à l'intérieur d'une théorie.

Par exemple, l'arithmétique et la théorie des nombres regroupent tout ce que l'on sait sur les entiers naturels : leur écriture dans différents systèmes de numération, les opérations définies sur ces nombres et les règles de calcul qui leur sont liées, les caractères de divisibilité, les congruences, le raisonnement par récurrence… Enseigner l'arithmétique à un niveau de scolarité donné (primaire, terminale scientifique…) suppose de choisir à l'intérieur de la théorie ce que l'on souhaite enseigner et ce que l'on convient d'ignorer.

Le savoir mathématique est, à un moment donné, consigné par écrit : les tablettes babyloniennes, certains papyrus chez les égyptiens en témoignent. L'ensemble des treize livres qui constituent les « Éléments » d'Euclide, fut constamment utilisé et étudié pendant deux millénaires. Cette œuvre a non seulement dominé tout l'enseignement de la géométrie jusqu'à nos jours, mais aussi exercé une grande influence sur la pensée scientifique. Aujourd'hui, les « Éléments mathématiques » de Bourbaki[28] réorganisent en très grande partie le savoir mathématique.

28. Bourbaki (Nicolas) pseudonyme collectif sous lequel les mathématiciens, pour la plupart français, ont entrepris depuis 1939, l'exposition des mathématiques en les prenant à leur point de départ logique et en proposant leur systématisation. (Article du *Petit Larousse*, éd. 1992).

3.4 LE CHOIX DES SAVOIRS À ENSEIGNER

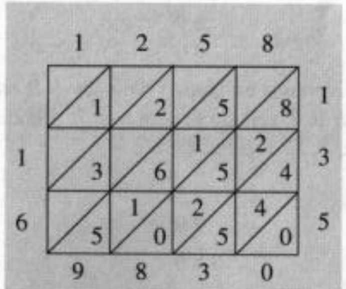
Les instructions officielles répertorient les savoirs à enseigner à tous les niveaux de la scolarité. Elles sont le résultat de négociations à l'intérieur du système social d'enseignement (le Ministère de l'Éducation Nationale, les instituts de recherche pédagogique, les enseignants, les mathématiciens, l'Inspection Générale, des académies, des personnalités, etc.). La décision finale relève des instances politiques nationales. Ces négociations et la décision finale sont évidemment liées au contexte social du moment (volonté populaire, avancées technologiques, niveau de formation des enseignants). Mais les influences sont multiples, de nombreux facteurs interviennent pour définir le savoir à enseigner.

La tradition

Quelles que soient les réformes des contenus d'enseignement, il est des domaines plus particulièrement ancrés dans les habitudes culturelles d'une société. Prenons l'exemple de l'algorithme de la multiplication. Le procédé connu de tous est celui enseigné dans les universités italiennes du 16^e^ siècle et utilisé en France depuis. Abandonner un tel procédé serait un peu abandonner un élément du patrimoine culturel devenu national. Il existe toutefois d'autres procédés de calcul du produit de deux nombres. Actuellement, on cherche à privilégier la construction du sens des opérations par les enfants. Cela amène donc les didacticiens à comparer ces procédés et étudier leur adéquation à cette construction du sens. Toutefois, même si d'autres procédés facilitent l'apprentissage, le poids de la tradition ne permet pas, pour autant, d'abandonner totalement l'algorithme traditionnel.

Exercice ***(corrigé page 212)***

Voici deux façons de calculer le produit 1258 x 135.



Méthode dite « per gélosia »

1 258	137	1 258
2 516	67	2 516
5 032	33	5 032
10 064	16	
20 128	8	
40 256	4	
80 512	2	
161 024	1	161 024
		169 830

Méthode dite « à la russe »

Analyser les algorithmes mis en œuvre (disposition spatiale, contrôle des calculs intermédiaires, résultats mémorisés…).

Les pourcentages, la règle de trois, les échelles sont encore souvent identifiés comme des notions différentes alors qu'elles relèvent d'un même savoir savant : les fonctions linéaires de ℝ dans ℝ. Pourquoi sont-elles identifiées comme différentes ? La première rencontre avec ces notions est très souvent liée à la résolution de problèmes « concrets ». Ces notions sont donc développées comme des savoir-faire adaptés à des problèmes pratiques et non construites à partir du modèle mathématique. Les exigences sociales pour faire apprendre des mathématiques « utiles » ont donc des conséquences sur l'organisation des savoirs à enseigner et leur terminologie.

Exercice ***(corrigé page 214)***

Voici les deux propriétés caractéristiques des fonctions linéaires de ℝ dans ℝ

$\forall x, \forall y : f(x + y) = f(x) + f(y)$ *et* $\forall k, \forall x : kf(x) = f(kx)$

Montrer, à partir d'exemples, comment on peut utiliser ces propriétés pour résoudre des problèmes de proportionnalité.

Les effets de mode

La volonté d'innovation pédagogique a des conséquences sur l'évolution des savoirs à enseigner. La durée de vie d'un objet d'enseignement est parfois soumise à des effets de mode. Par exemple, pour une opération donnée, le choix des algorithmes enseignés peut varier à condition de ne pas révolutionner la présentation.

Voici deux procédés de calcul de 175 – 89.

Procédé 1 :

$$\begin{array}{r} 175 \\ -\ 89 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{16\ 15} \\ \cancel{1}\cancel{7}5 \\ -\ 89 \\ \hline 86 \end{array}$$

« 9 ôté de 5, cela ne se peut pas. Je prends un paquet dans les 7. Il en reste 6. 9 ôté de 15, cela fait 6. 8 ôté de 6, cela ne se peut pas. Je prends le paquet de 1. 8 ôté de 16, cela fait 8. Le résultat est 86. »

Procédé 2 :

$$\begin{array}{r} 175 \\ -\ 89 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1_1 7_1 5 \\ -\ 89 \\ {}_{1\ 1} \\ \hline 086 \end{array}$$

« 9 pour aller à 5, ce n'est pas possible. 9 pour aller à 15, il faut 6. Je retiens 1. 8 et 1 ; 9. De 9 pour aller à 7, cela ne se peut pas. De neuf pour aller à 17, il faut 8 et je retiens 1. De 1 pour aller à 1, 0. Le résultat est 86. »

dait sur de nombreuses manipulations de « paquets », le procédé 1 devint à la mode parce qu'il reflétait exactement ces manipulations (casser des « paquets »). Ce procédé a montré ses limites lorsqu'il s'agissait de soustraire par exemple 567 à 10 000. Le procédé 2 correspond à la technique traditionnelle.

Exercice ***(corrigé page 214)***

Quelles propriétés mathématiques sont utilisées dans chacun de ces deux procédés ?

L'évolution technologique

Le choix des savoirs enseignés par l'institution est sans cesse remis en cause par l'apparition de nouveaux outils (pied à coulisse, palmer, règle à calcul, puis, plus tard, micro-ordinateurs, calculatrices, calculatrices graphiques) qui à l'origine, ne sont pas spécialement destinés au milieu pédagogique. Ce phénomène se traduit par des modifications de programme et nécessite une nouvelle approche de certains savoirs.

Par exemple, dans la scolarité obligatoire, l'algorithme de l'extraction d'une racine carrée, faisait partie des programmes des classes de troisième dans les années 50. Cet enseignement a été abandonné depuis et aujourd'hui plus personne ne sait trouver « à la main » la racine carrée de 3724. N'importe quelle calculatrice donne immédiatement une valeur approchée, par exemple 61.024585. Pour autant, le savoir « racine carrée » est toujours un objet d'enseignement. Les élèves savent ce qu'est une racine carrée. Ils connaissent la notation $\sqrt{a}$, ainsi que les principales règles de calcul :

$$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}\,.\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

On peut espérer que le temps dégagé par la machine qui calcule à la place de l'homme, laisse le loisir de contrôler les calculs, d'apprécier la pertinence des résultats obtenus…

Peut-on envisager qu'un jour, on n'apprendra plus l'algorithme de la division à l'école primaire ?… On imagine des levées de boucliers venant de toutes parts. L'évolution technologique doit donc composer avec la force des traditions.

Les avancées technologiques influencent également les sujets d'examen. Par exemple, il y a quelques années encore, un des buts d'une étude de fonction en terminale était de pouvoir donner une représentation graphique de la fonction étudiée. L'apparition des calculatrices graphiques impose de concevoir de façon différente le travail que l'on peut demander aux élèves en analyse.

Exercice

Le sujet national de la série STI Génie Mécanique du baccalauréat 1995 propose le problème suivant. Noter ce qui montre l'influence des calculatrices graphiques dans cette rédaction.

Partie A – Questions préliminaires

1. ln désigne la fonction logarithme népérien.
Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty]$ par

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

Construire, dans un plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions g et ln (on ne demande pas d'étude préalable).

2. Justifier, à partir des constructions faites dans la question 1., que pour tout nombre réel x strictement positif :

$$\frac{x^2}{2} + 1 - \ln x > 0$$

Partie B – Étude d'une fonction

L'objet de cette partie B est l'étude d'une fonction notée f et définie ci-dessous. La courbe (C) (cf. figure) est la représentation graphique de cette fonction dans un plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Elle est fournie pour permettre de contrôler l'exactitude de certains résultats.

On ne doit donc pas en tenir compte pour répondre aux questions mais il est demandé au candidat de signaler toute éventuelle contradiction entre les réponses obtenues par le calcul et la lecture de la courbe (C).

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 + 2\,\frac{\ln x}{x}$$

1. Déterminer par le calcul la limite de f en 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C).

2. a) Déterminer par le calcul la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
c) Déterminer par le calcul la position relative de (C) et de Δ.

3. Calculer la dérivée f′ de la fonction f. À l'aide de la partie A, déterminer le sens de variation de f.

4. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

5. Déterminer par le calcul le point de (C) où la tangente est parallèle à Δ.

Partie C – Calcul d'aire

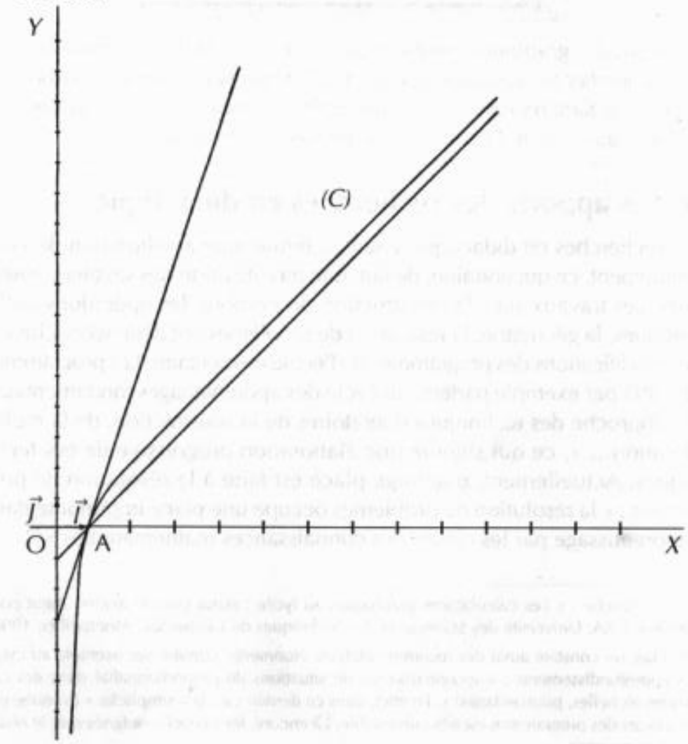
1. Déterminer une primitive de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
(On rappelle que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $x \to \dfrac{1}{x}$ est la dérivée de ln).

2. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1.
a) Calculer l'aire S (λ) du domaine plan ensemble des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

b) Déterminer la limite de S (λ) quand λ tend vers $+\infty$.

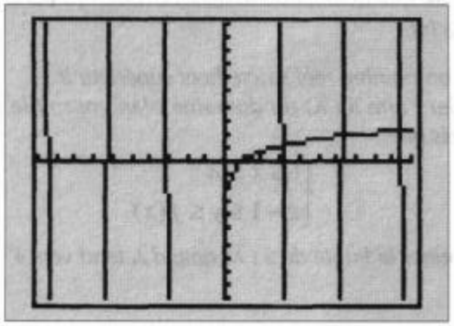
Courbe :



La représentation graphique n'est pas le but des calculs demandés au cours du problème mais elle devient un outil de contrôle des résultats obtenus par ces calculs.

Exercice ***(corrigé page 215)***

Voici un affichage produit par une calculatrice graphique. On demandait de représenter la fonction logarithme népérien (ln) et la fonction f définie par f (x) = 100 sin x :*



Résoudre graphiquement l'équation ln (x) = 100 sin x consiste à rechercher les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Un étudiant répond : « il y a une infinité de solutions : ça va continuer au-delà de l'écran ». Que penser de sa réponse ?

Les apports des recherches en didactique

Les recherches en didactique visent, à terme, une amélioration de l'enseignement, ce qui entraîne, de fait, une modification des savoirs à enseigner. Les travaux sur : la construction du nombre, les opérations arithmétiques, la géométrie, la résolution de problèmes ont déjà débouché sur des modifications des programmes de l'école élémentaire. Les programmes de 1995 par exemple parlent, au cycle des apprentissages fondamentaux, d'« approche des techniques opératoires de la soustraction, de la multiplication… », ce qui signifie une élaboration progressive de ces techniques. Actuellement, une large place est faite à la résolution de problèmes : « la résolution de problèmes occupe une place importante dans l'apprentissage par les élèves des connaissances mathématiques »[29].

* Cf. L. Touche : « Les calculatrices graphiques au lycée : statut pour le maître, statut pour l'élève », DEA, Université des Sciences et des Techniques du Languedoc, Montpellier, 1992.

29. Mais on constate aussi des recommandations étonnantes comme par exemple au cycle des approfondissements : « reconnaissance de situations de proportionnalité dans des cas simples (échelles, pourcentages) ». En effet, dans ce dernier cas, la « simplicité » évoquée par les auteurs des programmes est très contestable. Là encore, les savoirs enseignés sont le résultat de compromis.

L'organisation des cursus et des examens

Le choix des savoirs à enseigner se pose aussi lorsque interviennent des réformes de structure (nouvelles filières, nouvelles options, modification des épreuves d'examen…).

Par exemple, lors de la mise en place de la nouvelle section S (scientifique) des classes de première ou terminale, il a fallu définir des nouveaux programmes à partir d'un tronc commun dégagé des anciens programmes des classes des sections D et C. Il a fallu également recréer, par le biais des spécialités, des dominantes en mathématiques, physique et biologie. Les savoirs à enseigner apparaissent alors comme des compromis entre les anciens programmes et des choix nouveaux.

Conclusion : nous venons de voir que le choix des savoirs à enseigner dépend d'un certain nombre de facteurs. Certains savoirs apparaissent puis disparaissent (par exemple, les nouveaux programmes de l'école élémentaire de 1995 ne mentionnent plus les fonctions numériques). On peut retracer l'évolution des contenus d'enseignement en étudiant les instructions officielles qui se sont succédées ces dernières années.

Certains savoirs se transforment dans le temps scolaire (cf. l'exemple de la symétrie page 42), mais aussi dans leur approche (cf. l'étude des limites, des représentations graphiques au lycée).

3.5 LE CHOIX DES SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

Une fois que le savoir à enseigner est défini, il reste des étapes à franchir pour aboutir au savoir de l'élève.

C'est, tout d'abord, le travail de mise en texte du savoir à enseigner. Lors de l'écriture des instructions officielles, les experts sont amenés à adapter des définitions et des organisations de contenus, à choisir entre ce qui sera admis et ce qui sera démontré. Des objets peuvent être créés de toute pièce (cf. glissement méta-didactique, p. 75).

Le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné constitue l'étape suivante de la transposition didactique. Le professeur prépare son enseignement en se référant aux textes officiels, en allant puiser dans les manuels ce qui lui paraît le mieux adapté[30], en tenant compte de son expérience (par exemple, ce qu'il sait sur les notions difficiles ou importantes pour les élèves). Il organise la progression sur l'année. Le rapport du professeur aux manuels induit de nouvelles transformations du savoir.

30. Les ouvrages destinés à l'enseignement des mathématiques en France ont, eux aussi, leur histoire. Elle révèle des conflits importants sur les savoirs à enseigner en mathématiques. Le lecteur intéressé pourra lire : *Essai d'histoire des mathématiques* de Jean Itard, librairie scientifique et technique, 1984.

Par exemple, un maître de Cours Préparatoire qui utilise des fiches choisit de morceler les savoirs. (Apprentissage du nombre 5, du nombre 6, etc.)
Enfin l'acte d'enseignement lui-même transforme encore le savoir et d'autre part, le savoir retenu par l'élève n'est jamais identique au savoir enseigné.

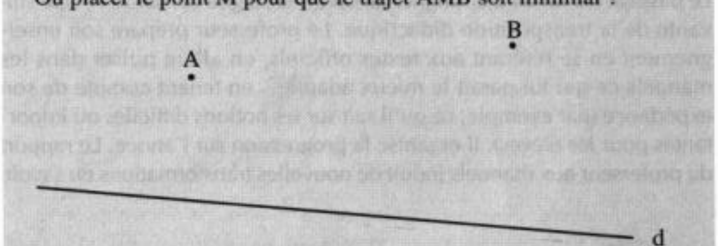
3.6 DIALECTIQUE OUTIL-OBJET

Un savoir donné, comme la symétrie axiale, intervient donc à différents moments de la scolarité mais son étude revêt au moins deux aspects :
- la connaissance de la notion mathématique ;
- la recherche des problèmes qui lui sont liée.

> **« Nous disons qu'un concept est *outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. [...] Par *objet* nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. »**[31]

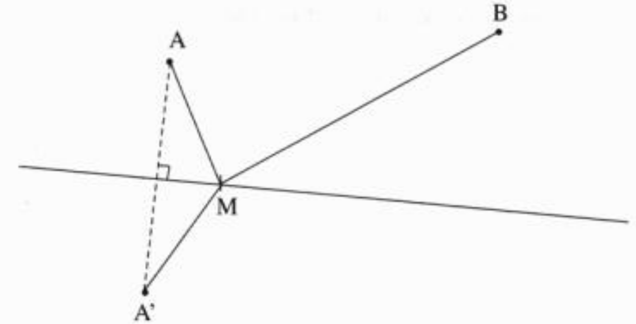
Une notion mathématique intervient comme outil (implicite ou explicite) de résolution de problème, est reconnue et étudiée en tant que savoir officiel (objet), puis intervient à nouveau comme outil dans d'autres problèmes...
Exemple : Les nombres entiers sont des outils pour garder la mémoire de la quantité, mais ils sont aussi étudiés en tant qu'objet dès l'école élémentaire : par exemple lorsque sont travaillés la désignation écrite et parlée, l'ordre, etc.
Revenons sur la symétrie axiale et étudions un exercice[32] qui la sollicite en tant qu'outil (recherche de trajet minimal).

Partant de A, on veut aller en B, mais, au passage on veut prendre de l'eau en un point M de la rivière (représentée par la droite d)
Où placer le point M pour que le trajet AMB soit minimal ?



31. R. Douady « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *RDM*, vol 7/2,1987, p. 9.
32. Exercice inspiré de Maths 2e. Collection *Terracher*. Hachette, 1994. p 341.

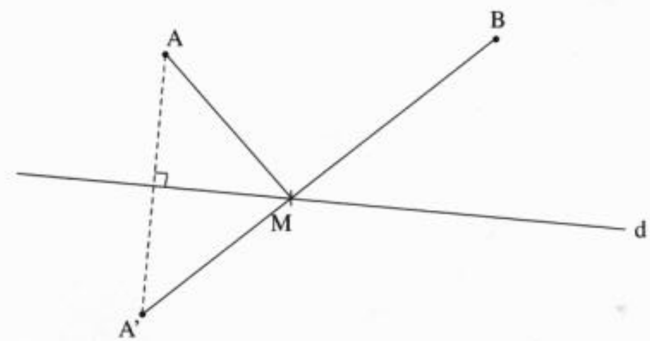
La symétrie orthogonale conserve les distances (propriété connue de l'objet symétrie orthogonale).
Soit A' le symétrique de A par rapport à d.



Le trajet AMB égale le trajet A'MB', la mobilisation de la symétrie orthogonale permet de ramener le problème au problème suivant :

On veut aller de A' à B en traversant la rivière en un point M.
Où placer le pont (le point M) pour que le trajet A'MB soit minimal ?

Dans ce cas, la solution est immédiate : le trajet minimal est obtenu pour A'M, B alignés. Donc AMB minimal pour A symétrique de A' par rapport à d.



Cet exemple montre une notion intervenant comme outil adapté de résolution de problème. Cette notion ne peut être mobilisée que parce qu'elle est connue comme objet mathématique entretenant avec d'autres objets de savoir (distance) des relations étroites.

Exercice libre

Relever dans des séquences relatives à la symétrie orthogonale des différents manuels ce qui concerne le caractère outil de la symétrie puis ce qui concerne son caractère objet.

LES DECISIONS DE L'ENSEIGNANT

4

Pour préparer les séquences de classe, et pendant la réalisation de ces séquences, le professeur doit constamment prendre des décisions.

Nous allons étudier certaines décisions et voir quels sont la marge de manœuvre, les espaces de liberté, les contraintes.

En reprenant la transcription d'un moment d'enseignement (cf. page 30) nous pouvons noter que le maître intervient pour :

– lancer l'activité c'est-à-dire donner les consignes d'organisation, lire l'énoncé du problème, noter au tableau les données importantes, expliquer le vocabulaire utilisé, donner les consignes de travail, répondre aux questions des élèves, distribuer le matériel ;

– s'assurer que les élèves s'engagent dans une recherche ;

– planifier le temps ;

– désigner l'élève qui va passer au tableau ;

– faire préciser les explications données par un élève ;

– obtenir le silence ;

– juger de la validité de la solution proposée ;

– etc.

On distingue des interventions qui relèvent de l'activité professionnelle habituelle (planifier le temps, désigner un élève...) d'autres qui sont liées à la construction même de la situation (juger de la validité de la solution proposée).

Le maître apparaît comme responsable du travail effectué, du temps qui s'écoule, du climat de la classe. Il est garant du savoir officiel de la classe (ce point sera repris plus tard : se reporter à la notion d'institutionnalisation page 147).

4.1 Deux fiches de préparation pour une même leçon

Une grande part du travail de l'enseignant se situe en amont de ses interventions dans la classe.
Les documents[33] qui suivent sont deux préparations pour une même leçon en Cours Moyen.

Première préparation

Première phase : réalisation des tableaux

Les élèves sont par groupes de 4. Ils reçoivent un jeu de 32 cartes-nombres numérotées de 0 à 31.
Consigne : « Distribuez les cartes, sans les mélanger, une à une, toujours dans le même ordre. Notez dans le tableau les nombres que chacun de vous a obtenus. »
Matériel : une grande feuille avec le cadre du tableau :

Marie	Éric	Julien	David

Un exemple est donné au tableau pour montrer comment chaque groupe remplit sa feuille.
Les tableaux remplis par les élèves sont ensuite affichés, les erreurs éventuelles sont corrigées collectivement.

Deuxième phase : prise de conscience des propriétés

Consigne écrite donnée aux élèves : « Pour chaque nombre du tableau, effectue la division par 4. Note en dessous du nombre le quotient en rouge et le reste en vert. Quelles remarques fais-tu ? Essaie d'expliquer ce que tu as remarqué. »
Dans la mise en commun, le professeur aide les élèves à formuler et à valider le résultat.

Troisième phase : exercices d'application

« Dans quelle ligne et dans quelle colonne serait le nombre 123 si on continuait le tableau ? »
« Quel nombre écrirait-on à la 67e ligne et à la 3e colonne ? »

Deuxième préparation

Première phase : mise en place du tableau

Le professeur commence à écrire les premiers nombres, sous le regard des élèves :
0 1 2 3
4 5
« Qui veut continuer ? »
Plusieurs élèves viennent successivement jusqu'à ce que le professeur soit assuré que tous sauraient continuer le tableau.
Le tableau s'arrête alors au nombre 18 par exemple.
Le professeur pose ensuite des questions du type :
« Dans quelle ligne est le nombre 10 ? »
« Dans quelle colonne est le nombre 17 ? »...

Deuxième phase : résolution de problèmes du type « où sera tel nombre ? »

Le professeur annonce que l'on va continuer le tableau mais qu'avant il faut essayer de prévoir ce qui va se passer.
« Dans quelle ligne et dans quelle colonne va-t-on écrire les nombres 35 et 40 ? »
Recherche individuelle.
Inventaire collectif des résultats et discussion entre les élèves. Le tableau est ensuite complété jusqu'à 40 et le résultat cherché est formulé clairement.
Plusieurs problèmes de ce type sont posés successivement.
Quand la solution correcte commence à être bien perçue par les élèves, le problème est posé avec deux nombres très grands : 464 et 517.
À la fin le professeur aide les élèves à formuler et prouver le résultat.

Troisième phase : exercices d'application

Phase identique à celle de la leçon précédente.

33. Document réalisé par H. Péault, IUFM d'Angers.

Exercice (corrigé page 215)

1. Quels sont, les objectifs de cette « leçon » ?
2. Comparer les démarches pédagogiques sur lesquelles s'appuient ces 2 préparations, notamment :
– repérer les interventions de l'enseignant. Ont-elles pour objet de communiquer une démarche à suivre ? Des connaissances ?
– analyser le travail de l'élève. Agit-il sous le contrôle du maître ? Sous sa propre responsabilité ?
– quel est le savoir en jeu et quelles sont les connaissances utilisables ?
3. Lorsque les élèves ont à chercher la ligne et la colonne d'un nombre, le maître choisit-il n'importe quel nombre ?

On trouvera des éléments pour une correction dans les paragraphes qui suivent.

4.2 Modèles pédagogiques sous-jacents

Les interventions d'un enseignant sont en fait très liées au modèle pédagogique qui est le sien.
Dans la première préparation, le professeur intervient très rapidement, en demandant aux élèves d'effectuer la division par 4 des différents nombres du tableau et de constater un fait.
À l'opposé dans la deuxième préparation, l'enseignant ne parle jamais de division. Ce sont les élèves, par les problèmes qu'ils ont à résoudre, qui sont amenés à diviser par 4 les nombres comme 35 ou 40, puis 464 et 517.
En revenant aux définitions des situations didactiques et a-didactiques, nous voyons que la première préparation correspond à une situation où le maître intervient en tant que détenteur du savoir, les élèves appliquent les consignes qu'il donne. Cette situation ne contient pas de phase a-didactique bien qu'il y ait des moments où les élèves cherchent.

En revanche, dans la deuxième situation, ce sont les élèves qui sont responsables de la connaissance à mettre en jeu. La phase a-didactique est ici importante. Le maître est présent, il intervient au besoin mais ne donne pas la solution cherchée par les élèves.

Nous allons aborder à présent deux concepts de didactique qui sont des outils d'analyse importants permettant la construction de situations d'enseignement.

4.3 Variable didactique et saut informationnel

Variable didactique

> **« Une *variable didactique* est un élément de la situation qui peut être modifié par le maître, et qui affecte la hiérarchie des stratégies de solutions (par le coût, la validité, la complexité). »[34]**

L'âge des élèves, leurs connaissances antérieures jouent sur la réussite à un exercice. Le maître ne peut pas, au moment où il construit la situation, les modifier. Ce ne sont pas des variables didactiques de la situation.

Dans un problème numérique, généralement les nombres constituent des variables didactiques. On peut faire une analyse plus précise en parlant de :

- la nature des nombres ;
- la taille des nombres ;
- la taille relative des nombres…

Par exemple dans le problème : « Jean avait 59 billes, il en gagne 2. Combien a-t-il de billes maintenant ? », les valeurs choisies permettent le surcomptage. En effet, dans ce cas, l'élève peut (se) dire 59, 60, 61 (en synchronisant avec un, deux, dans sa tête ou/et avec ses doigts : d'où le nom de surcomptage). Dans le problème « Jean avait 59 billes, il en gagne 27 », le surcomptage devient une procédure coûteuse et il sera alors probablement « mis en concurrence » avec d'autres stratégies.

Remarques : Dans un travail d'analyse de documents pédagogiques, d'outils pour le maître, l'identification des principales variables didactiques des situations proposées est pertinente. Une telle réflexion permet de mettre en regard les objectifs annoncés et les procédures susceptibles d'être mises en œuvre par les élèves. Cela donne des éléments objectifs pour apprécier une démarche pédagogique. Cela permet de prévoir les conditions d'utilisation du document.

Dans une interprétation de productions d'élèves, un retour aux variables didactiques de la situation permet d'apprécier en quoi une stratégie est adaptée : on peut parler d'efficacité, de coût (en temps, calculs…), de pertinence.

34. J. Briand : « Glossaire de didactique », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, actes du stage de Cahors, IREM de Paris VII, 1991.

Saut informationnel

Revenons à l'étude comparée des deux fiches de préparation. Pourquoi la deuxième situation est-elle productrice de connaissances ?

L'habillage des deux problèmes est légèrement différent d'une situation à l'autre (présence de cartes numérotées dans la première situation) mais ce n'est pas cela qui est important.

Les nombres choisis par le maître diffèrent par leur taille. Dans le premier cas ils sont compris entre 0 et 31 (si on ne tient pas compte de l'exercice d'application de la troisième phase), dans le second cas aucune limite supérieure n'apparaît.

La taille des nombres est ici une variable didactique importante. C'est un élément de la situation dont les valeurs sont choisies par le maître, ces valeurs ayant des conséquences sur les stratégies développées par les élèves.

Pourquoi, dans la deuxième situation, les élèves ont-ils à remplir le tableau jusqu'à 18, puis à répondre à des questions sur la place occupée par les nombres, 10, 17, puis 35, 40, puis 464 et 517 ?

Travailler sur les nombres jusqu'à 18 permet aux élèves de s'approprier le problème (cela correspond à la dévolution de la situation). Pour savoir où se trouve 35 on peut continuer le tableau mais cela est coûteux.

Pour répondre à la question concernant 464, une telle stratégie est impensable. Le saut brutal qui existe entre les différentes valeurs choisies par l'enseignant va obliger les élèves à abandonner la première méthode et imposer la connaissance en jeu ici « la recherche du reste dans la division par 4 ».

> **On appelle *saut informationnel* un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation susceptible de provoquer un changement de stratégie.**

Comme nous l'avons vu sur l'exemple précédent le « saut » doit être suffisamment grand pour que la procédure de base devienne inefficace. Le passage de 17 à 35 ne met pas en échec la première procédure.

4.4 Contrat pédagogique et contrat didactique

La vie d'une classe dépend de contrats implicites ou explicites ne serait-ce que parce que l'enseignant, comme les élèves, ont une idée du rôle qu'ils vont jouer. Pourtant, les contrats ne sont pas tous de même nature : ce qui relève de l'organisation de la classe et des habitudes de travail concerne le contrat pédagogique et ce qui a trait à la construction, à la transmission des savoirs concerne le contrat didactique.

Contrat pédagogique

Le *contrat pédagogique* est constitué de l'ensemble des règles de vie en vigueur dans une classe. La nature de ce contrat n'est pas liée à une discipline enseignée.

Il est la plupart du temps connu et maîtrisé par les enseignants. Il ne l'est pas toujours par les élèves. Ceux-ci doivent s'adapter à des fonctionnements différents d'un enseignant à l'autre, d'une année à l'autre.

Le respect des autres, le rangement du matériel, la répartition des tâches, etc., relèvent de ce type de contrat. C'est aussi le cas de l'organisation du travail : fréquence des devoirs personnels, présentation des cahiers, etc.

Prenons l'exemple d'un professeur qui fixe en début d'année la règle suivante : « les devoirs surveillés comporteront quatre exercices. Les trois premiers ressembleront à peu de choses près à des exercices déjà traités en cours, le quatrième pourra avoir un caractère original ». Il s'agit bien là d'un contrat pédagogique. Ce contrat pourrait être passé dans une autre discipline. Il permet à l'enseignant de préciser ce qui va être évalué et aux élèves de savoir comment organiser leur travail personnel.

Pour établir des relations de confiance dans une classe le contrat pédagogique a tout intérêt à être explicité.

Contrat didactique

Les deux fiches de préparation précédemment étudiées (cf. p. 66) se distinguent par leur approche pédagogique mais aussi par la conception des rôles attribués au maître et aux élèves. En suivant la première préparation, le maître induit la tâche des élèves alors qu'avec la deuxième ceux-ci doivent prendre en charge leur recherche. Ce sont des fonctionnements qui reposent sur deux contrats didactiques de nature différente.

« Le *contrat didactique* est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. »[35]

Il définit les rôles des uns et des autres et la part de responsabilité de chacun dans la gestion des savoirs. Contrairement au contrat pédagogique, l'existence du contrat didactique ne s'impose pas toujours à l'enseignant et encore moins aux élèves. Pourtant le professeur, par son attitude, détermine souvent de façon inconsciente le rapport des élèves au savoir : attente de la parole du professeur, attitude de recherche, contrôle de résultats par l'élève, etc.

35. Pour approfondir ce point, on pourra lire l'article de G. Brousseau : « Le contrat didactique : le milieu », *RDM*, vol. 9/3, 1990, pp. 309-336.

Le contrat didactique est déterminant au niveau des apprentissages. La professionnalisation du métier d'enseignant passe donc par son étude afin de permettre des choix réfléchis.

Il est dans la nature de ce contrat de pouvoir s'adapter aux élèves, au savoir en jeu, au moment et au type de tâche. Dans la phase a-didactique d'une situation, l'élève est responsable des connaissances qu'il mobilise, des stratégies qu'il développe. Dans une situation d'action, de formulation ou de validation, sa responsabilité n'est pas engagée de la même manière. Par exemple, dans une situation de validation, il doit fournir des preuves, développer des arguments, réfuter des critiques alors qu'en situation de formulation, on lui demande de présenter sa solution, d'expliciter sa démarche. Il n'a pas à convaincre des contradicteurs. Lors de l'institutionnalisation des connaissances, le maître reprend le principal rôle dans la gestion des savoirs, il apparaît comme le responsable officiel.

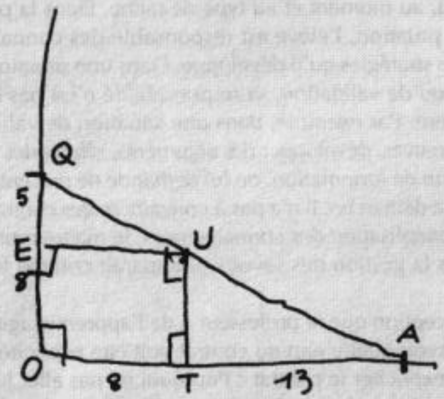
Selon la conception que le professeur a de l'apprentissage, le problème se pose de savoir quelle part du contrat doit être explicitée. « Pourquoi alors ne pas expliciter le contrat ? Pourquoi ne pas aller jusqu'à le coucher noir sur blanc, de manière à ce qu'il n'y ait plus d'ambiguïtés ? Malheureusement cela n'est pas possible, sauf à éteindre tout processus d'apprentissage, à donner les réponses en même temps que les questions.[36] ». Si l'objectif du professeur est de laisser à l'élève l'initiative de construire ou mobiliser telle connaissance, la présentation de la situation ne doit pas comporter des indicateurs de cette connaissance. Dans ce cas, la partie du contrat qui identifie le savoir en jeu doit rester dans un premier temps implicite au regard de l'élève.

Ainsi, non seulement, il apparaît nécessaire de maintenir implicites certains aspects du contrat, mais aussi de provoquer des ruptures pour que le savoir en jeu ne soit pas dévoilé et reste à la charge de l'élève. Dans une perspective constructiviste, le traitement du savoir en situation de classe, va plutôt reposer sur les ruptures prévues du contrat. Ces ruptures apparaissent nécessaires à l'apprentissage alors que dans une perspective béhavioriste le principal rôle dans la gestion des savoirs est toujours tenu par le maître.

36. S. Johsua, J.J. Dupin : *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF, 1993.

Exercice [37] ***(corrigé page 215)***

Après avoir revu les aires avec ses élèves, un professeur de quatrième, propose le problème suivant :



Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en cm.
Refaites cette figure en respectant les dimensions.
Que pouvez-vous dire des points Q, U, et A. ?

1. *Répondre à la question.*
2. *Examiner en quoi ce problème provoque sans doute une rupture de contrat.*

Exercice ***(corrigé page 216)***

Voici un extrait d'une copie d'un candidat à une épreuve de préprofessionnalisation à qui on demandait de résoudre le problème en faisant appel à ses connaissances mathématiques.

Aire de QOA = 136,5 cm²; aire de QUO = 52 cm²;
aire de OUA = 84 cm².
Si aire de QOA = aire de QUO + aire de OUA
alors Q, U, A sont alignés.
On a ici 136,5 ≈ 52 + 84 donc Q, U, A
sont alignés.

Quel commentaire vous inspire ce travail ?

37. Extrait de l'épreuve de mathématiques au concours de recrutement des professeurs des écoles, Bordeaux, 1994.

Dans une autre copie, un candidat écrit : « 136,5 est différent de 136 donc les trois points ne sont rien du tout ». C'est bien connu : en géométrie trois points sont alignés, cocycliques à la rigueur, sinon ils ne sont rien !

4.5 LES EFFETS VISIBLES D'UN MAUVAIS FONCTIONNEMENT DU CONTRAT DIDACTIQUE

Une attitude naturelle d'un élève en classe de mathématiques est de chercher à comprendre le plus possible le contrat qui régit les rapports entre le professeur, l'activité et lui-même. Cette attitude permet l'activité enseignante, mais ne garantit en aucun cas une réelle activité mathématique :
– parce que l'élève cherche à découvrir l'intention de l'enseignant et non à comprendre le problème qu'on lui propose ;
– parce qu'il fonde ses stratégies sur une demande habituelle de l'enseignant.

De son côté, le professeur peut être tenté de vouloir faire réussir les élèves « à tout prix ».

Pour parvenir à la production d'une réponse conforme, le professeur réunit des conditions qui permettent la réponse attendue sans que l'élève n'ait eu à investir le moindre sens. On parlera alors *d'effet Topaze.*

Exercice ***(corrigé page 216)***

Voici un extrait de la pièce « Topaze » de Marcel Pagnol :

(Scène 1) : Topaze est alors instituteur et fait faire une dictée…
TOPAZE : « des moutons… des moutons… étaient en sûreté dans un parc ; dans un parc.
(Il se penche sur l'épaule de l'élève et reprend.)
TOPAZE : « des moutons… mouton… ss…
(L'élève le regarde, ahuri.)
TOPAZE : « voyons, mon enfant, faites un effort. Je dis moutonsse étaient…
(Il reprend avec finesse.)
TOPAZE « étai… eunt. C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonsss.
(L'élève le regarde perdu…)

Expliquer en quoi, à production écrite identique, les savoirs en jeu seraient complètement différents selon le moment où l'enfant aurait mis un « s »…

Il y a une baisse des exigences. Le maître, par son souhait de vouloir faire réussir l'élève à tout prix change la nature du savoir en jeu.
Dans la leçon étudiée page 30, à partir de la remarque de Cédric, le maître influe considérablement sur la suite de la séquence en posant une seule question :

> CÉDRIC : La virgule représente le mètre.
> LE MAÎTRE : Ha ! Toi tu penses que la virgule, ici, représente le mètre donc qu'est-ce que tu t'es dit ensuite ? Si la virgule représente le mètre, que représentent les autres chiffres ?
> JULIEN : Et bien, les décimètres !
> ÉLISE : Les centimètres !
> JULIEN : Dé - ci - mètres !

Il fait basculer la réflexion vers la mesure sans qu'il soit certain que Cédric ait vraiment eu cette idée.

L'étude du contrat didactique a permis de mettre en évidence d'autres effets[38] comme l'effet Jourdain, ou le glissement métadidactique.

***L'effet Jourdain* est une forme d'« effet Topaze ». « Pour éviter un débat de connaissance avec l'élève, et éventuellement un constat d'échec, le professeur accepte de reconnaître comme l'indice d'un savoir ou d'une démarche authentiques, une production ou un comportement de l'élève qui ne sont en fait que des réponses ayant des causes banales »[39].**

Le nom donné à cet effet l'est en référence à la scène du « Bourgeois Gentilhomme[40] » dans laquelle le Maître de Philosophie explique à Monsieur Jourdain ce qu'est la prose.

> MONSIEUR JOURDAIN : « ... Au reste, il faut que je vous fasse une confidence. Je suis amoureux d'une personne de qualité, et je souhaiterais que vous m'aidassiez à lui écrire quelque chose dans un petit billet que je veux laisser tomber à ses pieds.
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Fort bien.
> MONSIEUR JOURDAIN : Cela sera galant, oui.
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Sans doute, Sont-ce des vers que vous voulez lui écrire ?
> MONSIEUR JOURDAIN : Non, non, point de vers.
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Vous ne voulez que de la prose ?
> MONSIEUR JOURDAIN : Non, je ne veux ni prose ni vers.
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Il faut bien que ce soit l'un ou l'autre.
> MONSIEUR JOURDAIN : Pourquoi ?
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Par la raison, Monsieur, qu'il n'y a pour s'exprimer que la prose ou les vers.
> MONSIEUR JOURDAIN : Il n'y a que la prose ou les vers ?
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Non, Monsieur : tout ce qui n'est point prose est vers ; et tout ce qui n'est point vers est prose.
> MONSIEUR JOURDAIN : Et comme l'on parle, qu'est-ce que c'est donc que cela ?
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : De la prose.
> MONSIEUR JOURDAIN : Quoi ? quand je dis : « Nicole, apportez-moi mes pantoufles et me donnez mon bonnet de nuit », c'est de la prose ?
> MAÎTRE DE PHILOSOPHIE : Oui, Monsieur.
> MONSIEUR JOURDAIN : Par ma foi ! il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j'en susse rien et je vous suis le plus obligé au monde de m'avoir appris cela. Je voudrais donc lui mettre dans le billet : belle marquise, vos beaux yeux me font mourir d'amour ; ... »

Par exemple, voici un schéma de séquence de classe portant sur l'introduction de la division à des élèves de 9-10 ans : le maître propose d'abord l'exercice suivant :

> Soit 20 bonbons à répartir équitablement entre 5 enfants. Combien de bonbons chaque enfant va-t-il avoir ?

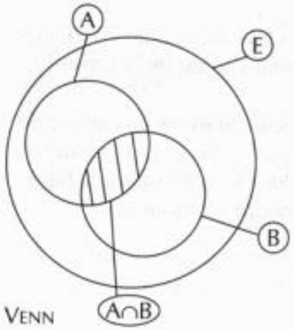
Il se sert alors de cet exercice pour dire aux élèves qu'ils viennent de faire une division (de 20 par 5) et expose ensuite le procédé de calcul. Cette séquence est une illustration de l'effet Jourdain. L'élève a réparti des bonbons en les distribuant peut être un par un, donc en ne mobilisant sans doute pas les connaissances mathématiques nécessaires pour appréhender la division. Le maître conclut en déclarant aux élèves qu'ils viennent de découvrir la division.
On aurait pu penser une activité préparatoire qui justifierait l'approche d'un outil nouveau : « on répartit équitablement 1249 bonbons entre 7 enfants... ». Ici, une distribution un par un est trop lourde. Savoir anticiper le nombre de bonbons que chaque enfant recevra devient économique.

Le *glissement meta-didactique* consiste à prendre comme objet d'enseignement ce qui n'était à l'origine qu'un moyen.

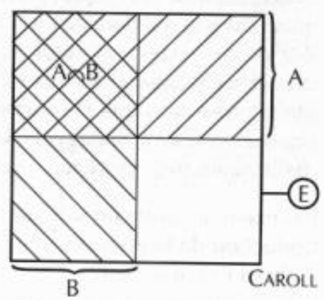
Ce type d'effet a eu de lourdes conséquences dans les années 70 lorsqu'il s'est agi d'introduire le langage ensembliste dans les classes de mathématiques. Puisqu'en mathématiques, il est rare qu'un objet intervienne seul, l'idée de constituer en une théorie ce que l'on appelle dans

38. Le lecteur intéressé par ces effets liés au contrat didactique pourra se reporter à l'article de G. Brousseau : *Petit x*, n° 21, intitulé « utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège ». IREM de Grenoble, 1989, pp. 47 à 68.
39. G. Brousseau (id. ci-dessus).
40. Acte II, scène IV.

le langage courant collection, groupement, famille, etc., d'objets est apparue. Cela s'est traduit par une transposition dans l'enseignement. Les programmes des classes de l'école, du collège et des lycées réservaient une part importante à l'apprentissage des opérations ensemblistes. Mais ce qui ne devait être qu'un moyen pour exprimer des idées s'est rapidement transformé en un objet d'enseignement. On a vu ainsi beaucoup de manuels faire des études détaillées sur les diagrammes (Venn et Carroll) par exemple. Cet effet a joué massivement. Il a échappé aux mathématiciens. Les programmes officiels ont authentifié ces « savoirs » et ceci dans la plupart des pays.



VENN



CAROLL

Tous ces effets qui traduisent un mauvais fonctionnement du contrat didactique sont liés à l'idée que l'enseignant se fait de sa mission : faire en sorte que les élèves produisent des réponses conformes dans des exercices types. De plus cela est gratifiant pour l'enseignant et l'élève. Or de tels exercices permettent d'évaluer des savoir faire mais n'informent pas sur la réelle appropriation des savoirs par les élèves.

L'ÉCRIT DANS L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

5

L'enfant, dans une classe, est un individu qui occupe une position particulière : il est en position d'élève. Il est soumis aux lois de l'école (mini société). En cours de mathématiques, comme en cours de français ou d'E.P.S., son comportement est dépendant du contrat didactique qui varie d'une discipline à l'autre. Nous avons vu qu'une grande part de ce contrat est implicite et n'apparaît que lorsqu'il y a rupture.

Toute activité mathématique passe à un moment donné par la production d'un écrit, la lecture d'un écrit. Les compétences mises en œuvre sont complexes et doivent être travaillées au niveau de l'école. Les enseignants de français disent depuis plusieurs années que activités de lecture et activités de production d'écrits sont complémentaires. En reprenant ce point de vue, on peut dire que c'est en produisant différents types d'écrits mathématiques que les élèves seront à même de lire ceux qui leur sont proposés. Bien que les pratiques enseignantes n'en soient pas toujours les témoins, le passage de la langue naturelle au langage mathématique est un enjeu incontournable de l'enseignement des mathématiques.

5.1 LA NATURE DES ÉCRITS MATHÉMATIQUES

Ces dernières années ont connu une prodigieuse évolution des méthodes d'apprentissage de la lecture. Citons E. Charmeux : « Pendant très longtemps, on a cru – et on a enseigné – qu'il y avait deux façons d'enseigner la lecture : la méthode traditionnelle, syllabique, et la méthode globale, volontiers considérée comme la responsable de tous les maux, vilipendée à qui mieux mieux, et qui ressort périodiquement lorsqu'on ne sait plus qui accuser ! En fait, cette vision des choses est plus que discutable, et ne correspond plus du tout à la situation d'aujourd'hui. »[41]

41. E. Charmeux : *Apprendre à lire : échec à l'échec*, Milan/Éducation, 1987, pp. 25, 104-112.

Un peu plus loin dans son ouvrage, E. Charmeux affirme : « Encore faut-il que l'activité de lecture s'actualise sur des objets matériels, à la fois spécifiques et divers : romans, dictionnaires, bandes dessinées, catalogues, affiches, partitions musicales, schémas et tableaux de données diverses, dont le fonctionnement n'est pas évident et qu'il faut apprendre. [...] On ne peut apprendre que sur des objets sociaux, conçus pour être lus et non pour enseigner la lecture. » Ainsi les supports de lecture se diversifient, l'écrit est de plus en plus travaillé dans son aspect fonctionnel.

Comment peut-on situer les écrits mathématiques dans l'activité de lecture ? Ils ont leur caractère propre mais ils n'entrent pas pour autant dans les supports rencontrés dans les classes pour l'apprentissage de la lecture. Devrait-il en être autrement ? Peut-on apprendre à lire des mathématiques sans faire des mathématiques ?
Par ailleurs, pour ne pas entraver de difficultés de lecture les activités mathématiques, les énoncés se présentent souvent dans une forme simplifiée. Ce souci de séparer lecture et mathématiques ne fait-il pas perdre de vue un des enjeux essentiels : s'approprier le langage mathématique ?
Les points de vue développés dans ce chapitre devraient apporter des réponses à ces questions.

Différents types d'écrits

Les écrits que l'on rencontre en mathématiques peuvent être répertoriés suivant leur fonction :
- énonciation de problème ou règle de jeu ;
- formulation de consigne ou question ;
- élaboration d'une stratégie ;
- production de messages ;
- communication de démarches ou de résultats ;
- explicitation d'un savoir repéré.

Ces différents types d'écrits n'obéissent pas aux mêmes règles et ne font pas appel aux mêmes compétences pour les lire ou les produire. Ils entrent tous dans des situations de communication particulières où les deux interlocuteurs ne sont pas nécessairement présents (communication différée ou autocommunication). Pour chacun d'eux, il est important de comprendre les règles d'organisation du discours, le langage utilisé.

Langue naturelle et langage mathématique

L'écrit mathématique fait intervenir deux registres de langue : la langue naturelle et le langage mathématique.
Deux énoncés de problèmes vont permettre d'illustrer ces propos.

Énoncé 1

Un éleveur dispose de 84 m de clôture. Il hésite entre deux possibilités :
– construire un parc rectangulaire dont la longueur soit le double de la largeur ;
– construire un parc carré.
Calcule, pour chacun des cas, la mesure en m des dimensions du parc.
Il décide de choisir celui des deux parcs qui a la plus grande aire. Quelle solution doit-il choisir ?[42]

Énoncé 2

Voici un message que j'ai reçu par téléphone.
Dessine la figure que l'on m'a décrite.
1. Sur une feuille quadrillée, trace un carré de six carreaux de côté.
2. En prenant chaque sommet comme centre, trace les quatre parties des cercles ayant trois carreaux de rayon et qui sont à l'intérieur du carré.
3. Colorie en bleu les portions de disque que tu as tracées.[43]

Ces deux textes de problème utilisent des termes du langage courant comme « éleveur, clôture, bleu, portions... » et des mots du vocabulaire géométrique « rectangulaire, longueur, largeur, carré, sommet, rayon... » termes qui existent par ailleurs dans la langue naturelle mais sont employés ici dans leur acception mathématique.

Un écrit mathématique est constitué de deux codes en interaction : la langue naturelle et le langage mathématique. Ce dernier emprunte des mots au français auxquels il donne une signification propre. Par exemple le mot « angle » que l'on trouve dans des expressions comme « sous un certain angle », « à l'angle du bâtiment »... renvoie en géométrie à un objet particulier. De même l'expression « être fonction de » qui traduit une dépendance, « en fonction du temps qu'il fera cet après midi, j'irai ou non à la plage », va en mathématique caractériser certaines relations entre, par exemple, des grandeurs mesurables : « l'aire d'un disque est fonction du rayon ».

Les termes mathématiques comme « droite », « cercle », « disque », « nombre », « chiffre »..., contrairement aux termes de la langue naturelle, apparaissent généralement comme univoques. Ils renvoient à des définitions précises qui s'intègrent dans une théorie.

42. R. Eiller : *Math et calcul CM2*, Hachette.
43. Collection *Diagonale CE2*, Nathan.

> **Exercice** *(corrigé page 217)*
>
> *Donner les différents sens des mots suivants et leur définition mathématique : chiffre, droite, figure, carré, produit, différence…*

On trouve cependant, à l'intérieur des mathématiques, un même mot utilisé avec des significations différentes selon le cadre[44] dans lequel il intervient.

C'est le cas par exemple du mot « carré » :

- le nombre 9 est le carré de 3
- les quatre points ABCD constituent un carré car…
- la ligne brisée fermée est un carré car…
- la surface délimitée par la ligne brisée est un carré…

Le langage mathématique utilise également des symboles ou des notations particulières de plus en plus nombreux en avançant dans la scolarité. Les plus fréquents, en dehors des chiffres du système décimal de numération, sont : =, +, –, x, <, ≤, …

D'autre part A et B désignant deux points du plan on distingue :

- le bipoint (A, B)
- la distance de A à B : AB ;
- le segment de bornes A et B : [AB] ;
- la droite passant par A et B : (AB) ;
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$
- …

Le calcul symbolique intervient à proprement parler au collège. Il permet d'entrevoir la supériorité du langage mathématique.

Par exemple la phrase, que l'on trouve dans des exercices de première sur la composition des applications, « prendre un nombre réel, lui ajouter 2 et diviser le résultat obtenu par le carré du nombre initial auquel on a ajouté 1 » semble univoque pourtant, en fonction du sens qui sera donné au pronom relatif « auquel », on pourra écrire :

$$\frac{x+2}{x^2+1} \quad \text{ou} \quad \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

En désignant par f et g les applications :

$f : x \to x^2$ et $g : x \to x + 1$,

dans le premier cas, on travaille sur gof : $x \to x^2 \to x^2 + 1$ alors que dans le second on a fog : $x \to x + 1 \to (x + 1)^2$

Ce problème que l'on rencontre dans l'usage de la langue naturelle est dû au fait que le contexte ne permet pas de choisir la bonne interprétation comme c'est généralement le cas dans un écrit ordinaire. Par exemple, dans la phrase, « c'est le chapeau de monsieur Martin qui s'envole », on comprend aisément que le pronom relatif « qui » renvoie à « chapeau ».

44. On pourra se reporter à la définition du mot cadre donnée p. 108.

La langue naturelle, lorsqu'elle intervient dans un écrit mathématique, abandonne les règles de la logique naturelle pour utiliser celles de la logique formelle. Par exemple le panneau « ouvert le dimanche » signifiera, pour un promeneur, « ouvert le dimanche, en plus des autres jours » si ce panneau se trouve sur la porte d'un supermarché ou bien encore « n'est ouvert que le dimanche » s'il s'agit d'une église. En langue naturelle, en fonction du contexte, on aura des interprétations différentes d'un même message. En revanche, dans un contexte mathématique, la proposition « ouvert le dimanche » n'a qu'une interprétation : « ouvert au moins le dimanche » : on ne sait rien sur les autres jours.

L'apprentissage du langage mathématique représente une part non négligeable des apprentissages mathématiques. Il suppose des activités de lecture et des activités de production d'écrits. Il ne peut être détaché des contenus mathématiques. L'enseignement doit permettre à chacun de passer progressivement de la langue naturelle au langage mathématique.

Des compétences multiples

Les différents registres de langue qui interviennent dans un écrit mathématique rendent celui-ci complexe et imposent des compétences multiples :

- des compétences purement linguistiques nécessaires à la compréhension de tout message écrit (maîtrise du code, connaissance du lexique, de la syntaxe, etc.) ;
- une connaissance plus spécifique du vocabulaire (figure, nombre, produit, aire…) et des symboles (+, =, <, …) strictement mathématiques ;
- un abandon progressif de la logique naturelle pour la logique formelle ;
- la capacité de repérer, sélectionner, trier les informations mathématiques nécessaires pour atteindre un certain but ou répondre à une question (résoudre le problème).

On comprend alors toute la difficulté pour un élève à aborder des textes mathématiques. Ces compétences ne sont pas souvent repérées et ne font pas toujours l'objet d'un apprentissage spécifique. Pourtant la compréhension des mathématiques se construit sur ces bases. De plus, ces compétences sont susceptibles d'être remises en cause tout au long de la scolarité en fonction des nouveaux objets mathématiques qui seront abordés.

5.2 L'ÉNONCÉ DE PROBLÈME

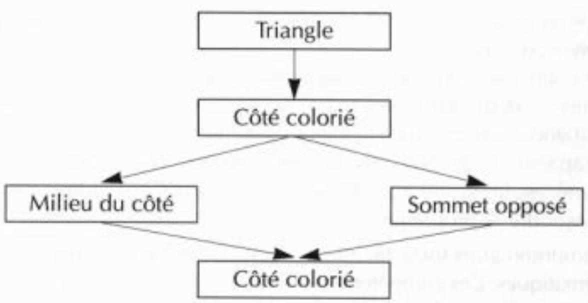
L'énoncé de problème est un type de texte très particulier pour lequel la compétence en lecture de texte narratif ou documentaire ne se transfère pas aisément. La prise de sens par les élèves demande une double compétence : compréhension de la situation proposée et de l'enjeu mathématique pour faire un choix de stratégies et d'outils adaptés. La lecture d'énoncés de problème est une activité spécifique qui nécessite un travail didactique particulier. Le travail de lecture, de tri d'informations, de réorganisation de données ne peut être engagé que s'il est guidé par une idée de stratégie de résolution. Le traitement numérique à proprement parler peut être différé (mise en place des opérations, calcul, contrôle des résultats…) mais la mise au point d'une stratégie évolue de manière dialectique avec la construction de sens.

■ Un type de texte bien particulier

Voici un texte proposé aux épreuves d'évaluation nationales de français de début de 6e en 1989 :

Trace un triangle avec un des côtés coloriés puis trace le segment qui joint le milieu du côté colorié au sommet qui lui est opposé.

Bien que figurant dans une évaluation de français, on demandait aux élèves de tracer effectivement la figure décrite. Peut-on comprendre pourquoi de nombreux élèves ont échoué à cet exercice (49 % de réussite[45]) ? A priori les termes mathématiques : triangle, côté, segment, milieu, sommet, sont connus par les élèves entrant en 6e. En revanche la structure enchâssée de la phrase est complexe :



Pour construire la figure, l'élève doit sélectionner des informations et les réorganiser en suivant la chronologie des actions que lui demande la construction de la figure.

Un énoncé de problème se présente comme un texte à la fois informatif (il contient des données) et injonctif (il demande de répondre à des questions ou d'effectuer une tâche). Les problèmes de l'école primaire

45. Le lecteur intéressé pourra consulter les résultats des évaluations nationales de 1989 de début 6e en français et en mathématiques.

utilisent généralement un habillage, une histoire ou un contexte documentaire afin de rendre « concrètes » les notions mathématiques en jeu. La maîtrise de la langue naturelle est indispensable pour construire du sens lors de la lecture « On accuse fréquemment les élèves de collège de ne pas savoir lire : en réalité ils savent lire les textes narratifs, car ils apprennent à lire sur ce type de texte […]. Or Les savoirs construits sur tel ou tel type de texte ne se transfèrent pas. Seule la technique se transfère mais si elle permet le déchiffrement du texte, elle n'en permet pas la compréhension[46] ». Savoir lire, c'est savoir adapter sa stratégie au type de texte que l'on a sous les yeux.

Exercice traité

Voici deux textes de problème :

Texte 1 :

Sur une carte, la distance en ligne droite Paris-Brest (506 km) mesure 92 mm.
a) Quelle est l'échelle de la carte ?
b) Sur cette même carte, on mesure 8 cm entre Bordeaux et Lyon. Calcule la distance réelle à vol d'oiseau entre ces deux villes.
c) À vol d'oiseau, Nantes est à 704 km de Marseille. Par quelle distance ces deux villes sont-elles séparées sur cette même carte ?[47]

Texte 2 :

Monsieur et Madame Dupommier, Mélanie et Christophe, leurs enfants de 12 et 14 ans, doivent aller à Chamonix, aux sports d'hiver.
Ils veulent savoir à combien leur reviendra le voyage aller et retour en voiture.
De Paris, où ils habitent, à Chamonix, il y a environ 600 kilomètres et leur voiture consomme 10 litres d'essence pour faire 100 kilomètres. Il faut bien compter 120 F de péage et 55 F par personne pour déjeuner sur l'autoroute à l'aller et autant pour le retour. L'essence coûte 5 F le litre.
Aide M. et Mme Dupommier à calculer le prix du voyage aller et retour à Chamonix[48].

Montrer en quoi ces énoncés diffèrent.

46. Maryse Rebière : « Rôle de l'énoncé dans la résolution de problèmes », DEA, Université de Bordeaux, Sciences de l'Éducation, 1991.

47. *Maths Livre Outil CM1*, Éd. Magnard.

48. *Objectif Calcul CM1*, Éd. Hatier.

Analyse comparative des deux énoncés

Pour comparer des énoncés on peut donc s'intéresser à leur structure, au style utilisé, aux faits relatés.

	Énoncé 1	Énoncé 2
la structure	* une donnée initiale * trois questions numérotées : – une phrase interrogative directe – une injonction – une phrase interrogative directe	* des informations multiples et dispersées au fil du texte * une question indirecte (une demande d'aide qui atténue l'effet ordre)
le style	* impersonnel : emploi de « on » * concis : – informations apportées en un minimum de texte – pas d'information parasite par rapport aux questions posées – pas de redondance	* narratif : introduction de personnages au service d'une situation * prolixe : – habillage de la situation – présence d'informations parasites (âge des enfants)
les faits relatés	* réels	* fictifs : mise en scène des personnages dans le but de produire du sens

Ce qui reste commun aux deux énoncés est la présence de données numériques, fait rare dans un texte narratif ordinaire. L'histoire racontée n'est pas une histoire comme les autres, elle est totalement au service de l'objectif mathématique. Elle n'a souvent d'intérêt que pour l'enjeu de recherche qu'elle propose.

La lecture est avant tout fonctionnelle. Suivant le contrat didactique en vigueur à un moment donné, l'élève devra retenir certaines informations et en négliger d'autres.

Suite de l'exercice traité page 83

Contrairement aux énoncés que l'on trouve dans des manuels scolaires de conception plus ancienne, l'énoncé 2 se présente comme un texte narratif et informatif relativement riche. Imaginons que ce texte soit proposé dans une séquence de français et dans une séquence de mathématiques. Un élève n'aura pas les mêmes informations à retenir dans l'une ou l'autre de ces deux séquences. Dégager les informations pertinentes dans l'une et l'autre discipline. Relever des expressions qui resteraient sous entendues dans un écrit de Français.

Séquence de français	Séquence de mathématiques
noms des personnages leurs âges lieu d'habitation projet de voyage à Chamonix nombreuses dépenses occasionnées (essence, péage, repas)	4 personnes consommation : 10 l aux 100 km essence : 5 F le litre à l'aller (comme au retour) repas : 55 F par personne péage : 120 F

Le contrat didactique habituel en classe de mathématique laisse penser que les données numériques sont importantes et que les autres données, qui servent à construire du sens, font partie de l'habillage du problème. Elles pourraient être remplacées par d'autres.

Pour le problème étudié, certains élèves mettront beaucoup de temps pour traduire « Monsieur et Madame Dupommier, Mélanie et Christophe » par « 4 personnes », or c'est l'information nécessaire au traitement du problème.

D'autre part, dans ce texte, l'histoire reste au service de l'objectif mathématique. On voit des expressions peu courantes dans un texte narratif :

– avez-vous déjà vu à l'entrée d'un restaurant « Menu à 55 F par personne » ?

– précise-t-on que le prix du repas est le même à l'aller et au retour ?

Ces informations restent sous-entendues habituellement.

L'habillage d'un énoncé de problème en texte narratif est justifié par la volonté de rendre « concrètes » les notions mathématiques en jeu pour qu'elles gardent du sens en tant qu'outils. Les textes à caractère documentaire sont aussi des habillages. Est-il possible de proposer de vrais enjeux de savoir sans habillage ? Cela suppose de construire des situations où le jeu proposé apparaît comme un défi proposé aux élèves.

■ À chaque objectif son énoncé

L'énoncé de problème et l'écrit mathématique en général sont trop souvent réduits à une forme simplifiée de texte visant à l'automatisation de techniques ou de règles en contexte et faisant fi de la nécessaire appropriation du sens de la tâche à effectuer par les élèves. Dans l'exercice précédent, l'énoncé 1 est conçu de façon à éviter les difficultés de lecture et à permettre rapidement la résolution du problème posé. L'énoncé 2 vise l'apprentissage de la lecture d'un texte mathématique.

Il est important de construire des énoncés de problème adaptés aux objectifs visés. Ainsi on se doit de distinguer les problèmes :

– visant à faire appliquer en contexte une technique déjà apprise dans des situations analogues (réinvestissement ou contrôle) ;

– visant un apprentissage par découverte d'une stratégie optimale (procédure experte) pour sa résolution ;

– visant un apprentissage méthodique à la lecture et au traitement d'énoncés.

■ La sélection des informations

Revenons à l'énoncé 2, il s'inscrit dans une logique de tri d'informations. Il est remarquable dans le sens où il illustre de façon claire qu'une recherche d'informations pertinentes ne peut se faire a priori. Ce n'est que parce que l'on entrevoit le traitement mathématique qu'il faudra produire que l'on peut reconnaître les données utiles. Dans cet exemple l'âge des enfants peut être négligé. Ce serait une donnée pertinente si le restaurant proposait un menu enfant pour les moins de 13 ans. Au contraire le nombre de kilomètres va intervenir dans le calcul du coût en essence, le nombre de personnes dans le calcul de la dépense occasionnée par les repas. Dans ce type d'énoncé des connaissances pragmatiques sont souvent nécessaires pour conduire un traitement mathématique. Par exemple, ici il faut savoir qu'un péage d'autoroute est demandé par véhicule et non par personne occupant le véhicule.

Différents supports de lecture peuvent être proposés aux élèves pour travailler la sélection des informations. Différents objets sociaux peuvent être utilisés et servir d'habillage à des situations mathématiques. Nous proposons comme exemple deux pages de manuel de CE2.

Le nouvel objectif calcul CE2, p. 30, 1995

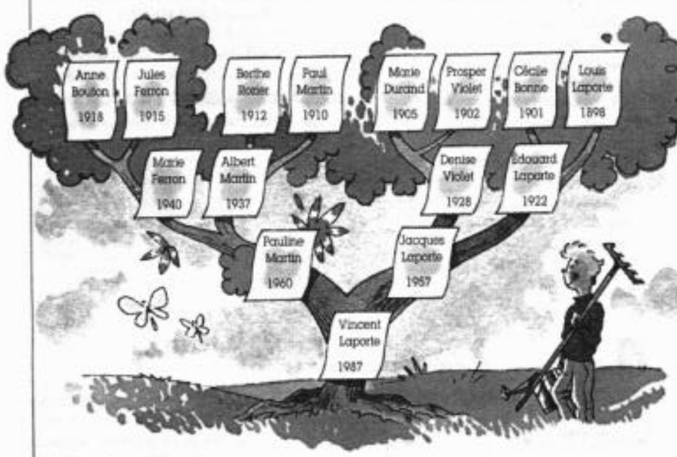
12 Résolution de problèmes : recueillir des informations (1)

Explorer divers documents

Découverte

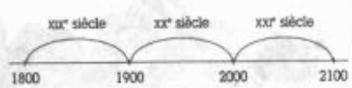
Un drôle d'arbre

L'arbre généalogique de Vincent Laporte indique les noms et les années de naissance de ses ancêtres.



Utilise cet arbre généalogique pour répondre aux questions suivantes.

1. Comment s'appelle le grand-père maternel de Vincent ?
2. Qui est né en 1910 ?
3. Pauline Martin est-elle plus jeune ou plus âgée que Jacques Laporte ?
4. Qui est l'arrière-grand-mère paternelle de Vincent ?
5. Comment s'appelle le mari de Cécile Bonne ?
6. Pourquoi Vincent Laporte et Louis Laporte ont-ils le même nom de famille ?
7. Quel est le prénom de la grand-mère maternelle de Vincent ?
8. Quelle est l'année de naissance de la fille de Vincent Laporte ?
9. Quelles personnes sont nées entre 1920 et 1940 ?
10. Utilise cette représentation du temps pour répondre à la question : Vincent Laporte a-t-il des grands-parents nés au XIXᵉ siècle ?



30

Le nouvel objectif calcul CE2, p. 31, 1995

CALCUL RÉFLÉCHI

Ajouter 10, 100, 1 000.

Problèmes

1 Après avoir lu cette publicité pour le spectacle « Aida », réponds aux questions suivantes :

a/ Quel est le nom de la salle de spectacle ?

b/ Que signifie le mot location ?

c/ Comment peut-on louer des places ?

d/ Que représente le dessin en bas à droite de la publicité ? Quels renseignements apporte-t-il ?

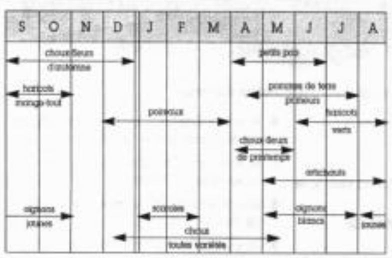
e/ Combien de spectateurs cette salle contient-elle ?

f/ Quel est le prix d'une place de 5e série (E) ?

g/ Pourquoi le prix des places est-il différent selon la série ?

h/ Quels autres renseignements apporte cette publicité ?

2 Voici le calendrier de production des légumes sur les côtes de Bretagne.



a/ Quel est le mois pendant lequel il y a le moins de production ?

b/ Quelle est la période où l'on produit à la fois des haricots mange-tout et des choux-fleurs ?

c/ Quels sont les mois où les côtes de Bretagne produisent le plus de légumes de différentes sortes ? Quels sont ces légumes ?

d/ Combien de temps dure la récolte des artichauts ? celle des petits pois ? et celle des radis ?

31

Activités de lecture réfléchie : quelques exemples

Des travaux sur l'écrit proposent des exemples d'activités de lecture en mathématiques[49]. De telles activités peuvent être conduites dans le cadre de l'apprentissage à la résolution de problème mais peuvent également être adaptées à des élèves qui auraient des difficultés en lecture. À titre d'exemples, voici quelques types d'énoncés :

Énoncés à structure langagière semblable, induisant un traitement numérique différent

Un éleveur de volailles expédie 7 608 boîtes d'œufs. Dans chaque boîte, il y a 24 œufs. Combien a-t-il expédié d'œufs ?

Un éleveur de volailles expédie 7 608 œufs. Il les met par boîte de 24 œufs. Combien va-t-il expédier de boîtes d'œufs ?

Un parking dispose de 3 niveaux de 126 places chacun. Combien de voitures peuvent stationner dans ce parking ?

Un parking dispose de 126 places sur 3 niveaux. Combien de voitures peuvent stationner par niveau ?

Le directeur d'une école de 6 classes commande 288 pochettes de feutres. Chaque pochette contient 12 feutres. De combien de feutres disposera chaque classe ?

Le directeur d'une école de 6 classes commande 288 feutres. Chaque pochette contient 12 feutres. De combien de pochettes de feutres disposera chaque classe ?

Énoncés à mots inducteurs « trompeurs »

Pierre mesure 125 cm. Son frère Joël mesure 141 cm. Combien Joël mesure-t-il de plus que son frère ?

Pierre paye un pantalon 259 F. Il a bénéficié d'une réduction de 25 F. Quel est le prix normal ?

Énoncés séparés des nombres

Les données numériques ont été séparées du texte du problème. Il s'agit de trouver leur place dans l'énoncé en assurant la cohérence mathématique et pragmatique.

49. Sur ce thème, on pourra lire les articles suivants :
Escarabajal : « Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques », *Revue Française de Pédagogie*, n° 82.
« Quel est l'âge du capitaine ? », *Revue N*, n° 19, IREM de Grenoble.
J.-F. Richard : « Traitement de l'énoncé et résolution de problèmes », *Bulletin de psychologie*, n° 375.

Le T.G.V. part de Bordeaux à … h … mn. Il arrive à Paris à … h avec 15 mn de retard. Quelle a été la durée du voyage ?
Nombres à placer : 11 ; 45 ; 15.

Pour nous cinq, papa achète … g de cerises à … F le kg. Quel est le prix des fruits achetés ?
Nombres à placer : 1500 ; 25.

Ces exercices ont comme objectif de dépasser une lecture superficielle du texte du problème qui consisterait à retenir des mots ou des nombres sans chercher à construire une représentation de la situation.

On peut aussi séparer dans le temps le moment de la lecture et de la prise d'information du moment du traitement numérique du problème[50]. Par exemple, les enfants lisent un texte de problème, écrivent la suite des opérations à effectuer pour résoudre ce problème et confient ce dernier travail à d'autres élèves (le centre de calcul). On trouve aussi des exercices demandant de construire un schéma pour organiser des données, pour mémoriser une activité mathématique ou l'évoquer, pour donner du sens à une situation. Certains manuels scolaires que l'on trouve aujourd'hui sur le marché proposent de nombreuses activités riches et variées visant l'apprentissage de la résolution de problèmes.

Produire des énoncés pour mieux savoir les lire

Des activités peuvent être proposées dans les différents cycles de l'école élémentaire afin d'aider les élèves dans la lecture d'écrits mathématiques. L'une d'elles consiste à faire produire un énoncé de problème correspondant à une opération donnée. La classe est organisée en équipes de 4 élèves, chaque équipe est séparée en 2 groupes, un groupe émetteur et un groupe récepteur.

Groupe émetteur ---> Groupe récepteur

Le maître propose au groupe émetteur une opération, par exemple 12 x 15. Ce groupe écrit un énoncé de problème dont la solution s'obtient en posant l'opération proposée et le transmet au groupe récepteur. Ce dernier doit résoudre le problème. Une première validation se fait en confrontant l'opération posée par le groupe récepteur et l'opération dont est parti le groupe émetteur. Cette confrontation ne suffit pas. Les messages élaborés par les différentes équipes doivent être ensuite discutés collectivement.

50. La collection *Ermel* Cours Moyen, Éd. Hatier, propose de tels exercices.

Voici des exemples de messages réalisés par des élèves à qui on proposait, en travail individuel, l'opération « 12 x 15 » :

Il y a 12 classes qui ont 15 élèves qui mangent à la cantine. Ils vont manger du potage. Combien de potage feront les cuisinières ?
Nicolas CM2

Dans une maison il y a 12 fenêtres. Les 12 fenêtres ont coûté 15 francs chacune. Combien a-t-on payé pour les 12 fenêtres ?
Christophe CM2

Un vigneron a 12 barriques de vin blanc de 15 kg. Combien a-t-il de vin blanc ?
Thomas CM2

Un garagiste a 12 marteaux et aussi 15 clés dans sa caisse. Il voudrait savoir combien il a d'outils ?
Marie CM2

Maman descend en ville et achète 12 paquets d'oeufs à 15 francs. Combien aura-t-elle d'oeufs ?
Aude CM2

Un livreur livre 12 bouteilles de lait contenant chacune 15 litres. Combien de litres de lait livre-t-il ?
Laurent CM2

Dans une boîte de stylo il y en a 12. Moaman veut acheter 15 boîtes. Combien maman a de stylos ?
Julie CE2

J'ai 12 rangées de 15 salades. Quel nombre total ?
Nelly CE2

Dans l'après midi, Paul décide d'aller en ville pour faire un cadeau à sa mère. Il va chez un fleuriste, il voit 12 roses à 15 francs l'une. Combien coûteront les 12 roses à 15 francs l'une ?
Christine CM2

Ma mamie plante 12 salades dans son potager. L'année d'après elle multiplie 15 fois le nombre de salades. Combien de salades ?
Manon CE2

Les messages ainsi produits sont sûrement différents de ceux qui auraient été réalisés par des groupes de deux élèves (un premier contrôle s'effectuant à l'intérieur des groupes). On peut noter que :
– tous les élèves utilisent les données numériques 12 et 15 ;

– certains élèves renvoient à un sens précis de la multiplication[51] (produit de mesures, grandeurs proportionnelles…), d'autres comme Marie ici sont loin de l'opération proposée ;
– des élèves comme Christine maîtrisent parfaitement les tournures en usage dans les énoncés de problème (l'une, chacune…) ;
– certains contextes collent à la réalité, d'autres paraissent invraisemblables (une fenêtre à 12 F).

Ce type d'activité met en évidence des difficultés mathématiques mais aussi les représentations des élèves concernant les énoncés. Différentes exploitations sont alors possibles : un travail mathématique sur le sens des opérations, un travail d'expression écrite dans un contexte particulier, une réflexion sur la vraisemblance des énoncés (caractère plausible des événements, ordre de grandeur des données, etc.).

Exercice libre

Faire une analyse détaillée de chaque message et envisager un travail différencié (en français ou mathématiques) pour aider chaque élève.

5.3 Les autres écrits mathématiques

Les consignes

Sans proposer une étude exhaustive des différentes consignes qui existent au niveau des activités mathématiques il convient de distinguer les consignes « ouvertes » des consignes « fermées ».
Par exemple, l'exercice étudié page 72 aurait été bien différent si on avait demandé « Démontrez que les points Q, U, A ne sont pas alignés » plutôt que « Que pouvez-vous dire des points Q, U, et A ? ».
Est-il plus intéressant de laisser des questions ouvertes ? A priori cela demande à l'élève un travail de recherche plus poussé. Mais on risque de tomber dans une recherche des intentions de l'auteur plutôt que dans la recherche d'un défi mathématique.
Pour ce même exercice, la réponse « Q, U, A sont alignés » en est la preuve. D'autre part, que penser des réponses suivantes :
– Q, U et A sont des sommets de triangles ;
– Q est à 13 cm de O, A est à 21 cm de O et Q se trouve à $8\sqrt{2}$ cm de O ?
Ces deux réponses sont justes. La première est non pertinente car un point peut toujours être considéré comme sommet d'un triangle. Un élève qui apporte cette réponse fait en fait référence à la figure qu'il a sous les yeux et aux triangles déjà tracés. La deuxième réponse est intéressante. Elle suppose un traitement des données :

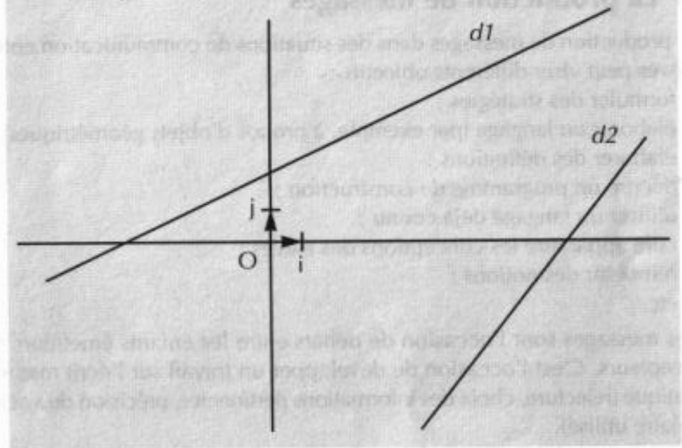
51. Se référer aux travaux de G. Vergnaud sur les différents sens de la multiplication : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Éd. Peter Lang.

– simple pour les deux premières distances : QO = QE + EO = 5 + 8 ; AO = AT + TO = 13 + 8 ;
– plus élaboré pour la dernière : le triangle OEU étant rectangle, le carré de l'hypoténuse OU est égal à la somme des carrés des côtés OE et EU soit $OU^2 = OE^2 + EU^2$ ou encore $OU^2 = 64 + 64 = 128$.

Ce n'est pas la réponse attendue. On voit à travers cet exemple que toute question de la forme « Que peut-on dire de… ? » peut déboucher sur des considérations non prévues par l'enseignant. Suivant l'objectif de la situation proposée aux élèves – évaluation de connaissances, problème de recherche – ce type de question est à éviter ou au contraire à privilégier. On retrouve là un point déjà vu à savoir « à chaque objectif, son énoncé ».

Exercice ***(corrigé page 218)***

On a représenté deux droites d1 et d2 dans le plan muni d'un repère R = (O, i, j). Que peut-on dire de ces deux droites ?



Imaginer des réponses possibles d'élèves de troisième à la question posée.

La lecture de consigne est directement liée au savoir en jeu et au contrat didactique de la classe. Son apprentissage relève de l'apprentissage mathématique.

L'élaboration d'une stratégie de résolution

L'écrit aide à structurer la pensée, en particulier il favorise la construction d'une stratégie de résolution d'un problème. L'école utilise des cahiers de brouillon ou cahiers d'essais sur lesquels l'élève peut se tromper, ne pas respecter des règles de présentation. Ces cahiers sont généralement de mauvaise qualité, n'ont pas droit à un protège-cahier… Un cahier de « recherche mathématique » pourrait se définir comme la propriété privée de l'élève. Faire des mathématiques, c'est écrire, faire des essais, se tromper… Le langage alors utilisé peut ne pas être conventionnel. On n'est pas dans une démarche de communication mais simplement de recherche. La trace écrite est nécessaire pour faire aboutir un raisonnement : mesurer l'écart au but, conclure, réorganiser les idées et rendre leur enchaînement plus élégant. L'école ne doit pas « tuer » la production d'écrits spontanés en mathématiques car ils font partie de l'activité mathématique.

Cette attitude face aux mathématiques peut être favorisée par le respect d'un domaine privé pour l'élève mais valorisé au sein de l'école. On verra dans le chapitre 6 « La prise en compte des connaissances des élèves » page 99, une étude de stratégie d'élève.

■ La production de messages

La production de messages dans des situations de communication entre élèves peut viser différents objectifs :
- formuler des stratégies ;
- élaborer un langage (par exemple, à propos d'objets géométriques) ;
- élaborer des définitions ;
- décrire un programme de construction ;
- utiliser un langage déjà connu ;
- faire apparaître les conceptions des élèves ;
- réinvestir des notions ;
- etc.

Ces messages sont l'occasion de débats entre les enfants émetteurs et récepteurs. C'est l'occasion de développer un travail sur l'écrit mathématique (relecture, choix des informations pertinentes, précision du vocabulaire utilisé).

On trouvera des activités de productions de messages étudiées dans différentes parties de l'ouvrage.

■ La communication de procédures et de résultats

Rechercher un problème ou en rédiger la solution sont deux choses très différentes. La première est d'ordre privé alors que la deuxième entre dans une démarche de communication et doit donc en suivre les règles. Le passage de la solution trouvée à la solution présentée relève d'un apprentissage.

Nous reproduisons en page suivante un extrait de manuel de Cour Moyen datant de 1960[52].

52. *Morgan Thaller*, p. 39.

Modèle

PROBLÈME

Une boulangerie travaille chaque jour 19 balles de farine pesant chacune 1 q. Elle est fermée chaque mardi et prend 3 semaines de congé payé dans l'année. Calculez :

1° Le poids de farine employé par semaine, sachant que la veille de la fermeture hebdomadaire, il faut 450 kg de farine de plus que les autres jours.

2° Le poids de farine employé par an.

3° Le poids de blé correspondant à la quantité de farine employée, si 100 kg de farine sont fournis par 130 kg de blé.

Solution		*Réponses*	*Opérations*
Nombre de jours de travail par semaine			11850
7 j − 1 j	=	*6*	× 49
Poids de farine employé en 6 jours			106650
1 q × 19 × 6	=	*114 q*	47400+
			580650
Poids total par semaine			
11 400 kg + 450 kg	=	*11 850 kg*	6 6 6 4
Nombre de semaines de travail			
52 s − 3 s	=	*49*	
Poids de farine par an			
11 850 kg × 49	=	*580 650 kg*	5806,5
Nombre de centaines de kg	=	*5 806,5*	× 130
			174195 0
Poids de blé correspondant			58065 +
130 kg × 5 806,5	=	*754 845 kg*	754845,0

Réponses

Poids de farine employé par semaine : *11 850 kg*

Poids de farine employé par an : *580 650 kg*

Poids de blé correspondant : *754 845 kg*

6 6 6 4

Ce modèle semble désuet mais un des rôles de l'école est d'apprendre aux élèves à communiquer. Une copie, dans la mesure où elle doit être lue par une autre personne (le correcteur en l'occurrence) doit être présentée selon certaines règles. Toutefois, on peut regretter que trop souvent celles-ci n'apparaissent que de façon arbitraire : « souligner les réponses en rouge, sauter une ligne après la question, laisser 4 carreaux après la marge... » sans que leur existence ne soit justifiée.

À l'école primaire, rédiger une solution et communiquer une démarche sont deux choses distinctes. Cela n'est plus tout à fait vrai dans le secondaire où tout résultat doit être justifié, démontré. Alors, les règles de la communication deviennent plus complexes. L'élève peut avoir envie d'argumenter pour convaincre le professeur de la validité de sa solution, ou, au contraire, estimer que celui-ci comprendra, même si certaines étapes du raisonnement ne sont pas mentionnées. Dans ce dernier cas, les exigences de l'enseignant peuvent alors apparaître comme des marottes.

Pour permettre l'apprentissage de la communication de procédures ou de résultats, il va falloir inventer des situations dont ce sera l'objectif. La rédaction d'une copie lors d'une évaluation sera alors la mise en œuvre de cet apprentissage.

***Exercice* (corrigé page 219)**

Évaluer les copies de Laure et Antoine, élèves de seconde, à qui on demandait de déterminer une équation dans un repère du plan de la droite passant par E, E (– 12, 2) parallèle à la droite (BC) les points B et C ayant comme coordonnées : B (– 1, – 4) et C (7, 7).

Laure

coef. dir. (BC)

$\dfrac{-4-7}{-1-7} = \dfrac{-11}{-8} = 1{,}375$

(E) $y = 1{,}375x + b$

$2 = 1{,}375x - 12 + b$

$2 = -16{,}5 + b$

$b = 18{,}5$

Antoine

Equation de la droite passant par E et parallèle à la droite (BC)

$E(-12, 2)$ $M(x, y)$

$\overrightarrow{EM}(x+12, y-2)$ $\overrightarrow{BC}(8, 11)$

La droite passant par E et parallèle à la droite (BC) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Un point M se trouve sur cette droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ou si leur déterminant est nul.

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs.

$\det(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} x+12 & 8 \\ y-2 & 11 \end{vmatrix} = 11(x+12) - 8(y-2)$

$= 11x - 8y + 148$

$\boxed{\text{L'équation cherchée est } 11x - 8y + 148 = 0}$

La copie de Laure contient la trace de son raisonnement, elle correspond à un écrit privé car elle n'utilise pas les règles habituelles de communication. A contrario celle d'Antoine répond parfaitement aux attentes d'une classe de seconde. Rédiger une solution c'est réaliser un message compréhensible par un récepteur qui peut ignorer la question posée, qui n'est pas censé connaître la stratégie développée... Cela s'apprend.

La formulation du savoir repéré

Expliciter le savoir en jeu à un moment donné des apprentissages est une phase incontournable (institutionnalisation) afin que les élèves repèrent le savoir en jeu. Cela débouche sur des écrits mathématiques dans le cahier de cours mais aussi dans les aide-mémoire que proposent les manuels scolaires. (Nous proposons en p. 98, un aide-mémoire du manuel *Le Nouvel Objectif Calcul CM1*, Éd. Hatier, p. 210.)

On a tendance à croire que dans un résumé de cours, les exemples choisis, les remarques formulées, dans la mesure ils ont été explicités, sont compris par les élèves.

Une anecdote va illustrer le fait que les enseignants ne mesurent pas toujours les difficultés rencontrées : dans une classe de terminale, un professeur fait écrire aux élèves en titre de leçon « Produit scalaire » et en première remarque la phrase suivante : « Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel ». Suivent alors la définition du produit scalaire de deux vecteurs et les premières propriétés. Quelques jours plus tard, il effectue un contrôle rapide de connaissance et demande aux élèves, outre le calcul du produit scalaire de quelques vecteurs simples, de rappeler la définition. Plus de la moitié d'entre eux écrivent : « Le produit scalaire de deux vecteurs est un réel » et effectuent ensuite les calculs correctement. Le statut des mots « définition », « théorème », « propriété »... échappe parfois aux élèves or ils entrent dans le langage mathématique.

Le Nouvel Objectif Calcul CM1, page 210

A I D E - M É M O I R E

Opérations

1 L'addition : technique

Pour faire une addition en colonne :

- il faut placer les nombres à additionner les uns sous les autres, en alignant en colonnes les chiffres d'une même classe (unités, dizaines, centaines...) ;
- il ne faut pas oublier les retenues s'il y en a.

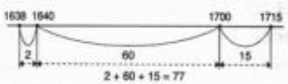
	M	c	d	u
	1	2	1	
	1	6	9	7
			8	4
+		9	5	6
	2	7	3	7

2 La soustraction : sens

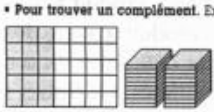
Voici des situations où la soustraction permet de trouver rapidement la solution.

- **Pour trouver une distance ou un écart.**

Exemple : Louis XIV, né en 1638, est mort en 1715.
Il a vécu 1715 – 1638 = 77 ans, ce qui peut se représenter par ce schéma :



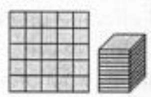
- **Pour trouver un complément.** Exemple :



15 carreaux sur 35 sont déjà posés.
Il faut commander le complément :
15 + 20 = 35
ou 35 – 15 = 20

- **Pour trouver un reste.** Exemple :

On a 35 carreaux.
On en utilise 25.
Il en reste :
35 – 25 = 10



3 La soustraction : technique

- 235 – 198 = (235 + 2) – (198 + 2) = 237 – 200 = 37

Le résultat d'une soustraction ne change pas si l'on ajoute le même nombre à ses deux termes.

- Cette propriété est utilisée dans les soustractions à retenues.

	c	d	u
	5	2	5
–	3	2	7

+ 10 u
+ 1 d

	c	d	u
	5	2	10 + 5
–	3	1 + 2	7
			8

+ 10 d
+ 1 c

	c	d	u
	5	10 + 2	10 + 5
–	1 + 3	1 + 2	7
	1	9	8

210

LA PRISE EN COMPTE DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES

6

Nous avons déjà évoqué, pages 90 et 93 (étude de messages écrits), tout l'intérêt qu'il y avait à s'intéresser aux formulations écrites des élèves. Dans cette partie, nous allons centrer notre attention sur les échanges oraux puis étudier des écrits d'élèves et en tirer quelques réflexions.

6.1 LES ÉCHANGES ENTRE ÉLÈVES

L'organisation par groupes pour une activité mathématique peut parfois être très intéressante. Les élèves échangent à propos des notions en jeu dans leur propre langage, ils confrontent des points de vue et vont donc faire évoluer leurs représentations. Toutefois il est très difficile pour le maître de gérer ce qui se passe. De nombreuses choses lui échappent : des idées intéressantes qu'il pourrait exploiter dans son enseignement comme des affirmations fausses qu'il souhaiterait remettre en question. On n'a pas souvent la possibilité de s'intéresser aux échanges qui peuvent exister entre des élèves en dehors du regard du maître.

Reprenons les échanges entre Julien et Élise lors de la leçon observée page 30. Élise propose des essais sur les nombres. Julien, parce qu'il écrit ou ne dit rien, approuve ce que dit Élise. C'est elle qui organise la recherche.

Un peu plus tard, Julien propose « moins », il est aussitôt interrompu par Élise « on ne peut pas couper ! ». Élise renvoie à Julien le sens de la soustraction. Il y a contrôle du sens à l'intérieur du groupe, ce qui n'aurait pas forcément existé chez un élève seul. Il est intéressant de regarder ce qui se passe lorsque les élèves arrivent à :

$$1{,}57 + 0{,}3 = 1{,}60$$

C'est Élise qui a l'idée de ce calcul. Julien ne le remet pas en cause. Il semble simplement être attentif au résultat pour le comparer au nombre cherché. Dans la suite du dialogue, Élise dit « non, là c'est faux » mais en fait ce n'est pas la procédure de calcul qui est remise en cause mais simplement le fait que 1,60 n'est pas le nombre attendu pour cet exercice.

À la suite de cette séquence, le maître propose un nouveau jeu : « Le compte est bon ». Il s'agit de trouver un nombre fixé en ajoutant des nombres choisis dans une liste donnée.

Nous allons retrouver Élise et Julien face à un nouveau problème.

> Liste proposée : 0,45 1,58 1,27 2,035 2 1,7
> Somme à obtenir : 5,28

Élise et Julien vont tenter de nombreuses additions… Ils vont essayer de trouver une stratégie : faut-il prendre les nombres les plus grands ? Après un moment de découragement voilà ce qui se passe :

> ÉLISE : Comme ça zéro… attends laisse moi faire… pourvu que ça marche cette fois ci…
> ÉLISE : Attends, attends, j'ai presque, dix, onze, douze… zéro virgule trois, quatre, cinq… c'est bon, on a trouvé !
>
> *Entre eux*
>
> $$\begin{array}{r} 2{,}035 \\ +\ 1{,}58 \\ \hline 3{,}93 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}93 \\ +\ 2{,}035 \\ \hline 5{,}028 \end{array}$$
>
> JULIEN : Il faut enlever le zéro.
> ÉLISE : Oui, mais c'est bon.
> JULIEN : Alors ce n'est pas moi qui vais au tableau !

Dans cet échange on voit que le zéro ne pose pas de problème à Élise qui affirme avoir trouvé le bon nombre. Pour elle 5,028 égale 5,28. Cette affirmation fausse se fonde vraisemblablement sur une affirmation juste (par exemple : 13,24 = 13,240) dont l'enfant tire un théorème faux en généralisant quelque soit la place du « 0 ». Julien réagit : « il faut enlever le zéro », mais le résultat obtenu doit lui sembler douteux car il ne veut pas passer au tableau.

On assiste ici à des interactions entre les élèves qui ne débouchent pas sur un débat d'idée et sur la connaissance. L'absence de rétroactions internes à la situation ne permet pas à chaque enfant de contrôler les affirmations de l'autre. On voit ainsi combien il est important pour le professeur de construire des situations au cours desquelles l'élève va mettre ses hypothèses à l'épreuve des faits.

.2 Les situations favorables

En Cours Moyen première année, un maître propose l'activité suivante :

> Vous allez vous répartir en 3 équipes de 8. Chaque équipe se scinde en deux groupes : un groupe émetteur et un groupe récepteur. J'ai découpé des figures géométriques dans du carton. Je vais donner une de ces figures à chacun des groupes émetteurs. Les émetteurs doivent donner tous les renseignements qu'ils jugent nécessaires pour que les récepteurs puissent réaliser la figure, sans la voir. Je porterai le message au groupe récepteur de votre équipe qui devra réaliser une figure superposable à la figure de départ. Mais attention il ne devra pas y avoir de croquis sur les messages.

Le groupe récepteur réalise la figure décrite par le message. Puis, l'ensemble de l'équipe vérifie par superposition.

Voici des exemples de messages produits lors de cette activité :
(On note Ti les messages qui se rapportent à des triangles, Ci ceux qui se rapportent à des carrés, etc.)

T1 : « C'est une figure triangulaire. Le plus grand côté fait 12 cm 8 mm, le plus petit fait 9 cm. Le troisième fait 10 cm. »
Les récepteurs répondent qu'ils trouvent que le troisième côté fait 11 cm 8 mm et que « ça ne se peut pas. » Les émetteurs confirment leurs mesures. En fin de comptes, le triangle construit ne se superpose pas avec le modèle.

T2 : « Ça a trois côtés. Un côté fait 7 cm, l'autre côté fait 6 cm, l'autre côté CA fait 14 cm. »
Les récepteurs disent ne pas savoir faire.

T3 : « C'est un triangle. Il y a un angle droit. C'est A. Le côté AB fait 4 cm, le côté AC fait 3 cm. Le côté BC fait 5 cm. Le côté BC est le plus grand côté. »
Le triangle construit ne se superpose pas avec le modèle.

Exercice **(corrigé page 219)**

Pour chacun de ces messages, analyser l'origine probable de l'échec. Provient-il du groupe émetteur ? Du groupe récepteur ?

Cette exemple met en évidence des conceptions d'élèves de Cours Moyen concernant le triangle. Voici maintenant des messages écrits obtenus dans des conditions semblables et relatifs à d'autres figures géométriques :

Exercice **(corrigé page 220)**

Voici des messages concernant d'autres figures géométriques : (carré, rectangle, losange, parallélogramme).

> C1 : « C'est un carré, le côté AB mesure 6 cm, le côté BC mesure 6 cm, le côté CD mesure 6 cm, le côté DA mesure 6 cm. Il a quatre angles droits. Tous les côtés sont égaux. »
> C2 : « C'est un carré, Tous les côtés font 6 cm, il y a 4 angles droits. »
> R1 : « C'est un rectangle. Il y a 4 angles droits. Le côté AB mesure 7 cm, le côté BC mesure 4 cm, le côté CD mesure 7 cm, le côté DA mesure 4 cm. »

R2 : « C'est un rectangle. Il fait 7 cm de long et 4 cm de large. »
L1 : « Il y a quatre côtés. Le premier côté mesure 7 cm, le deuxième mesure 7 cm, le troisième mesure 7 cm, le quatrième mesure 7 cm. C'est comme un carré penché. »
L2 : « Il y a quatre côtés. Ils mesurent tous 7 cm. Il y a les côtés AB puis BC puis CD puis DA. Il y a 9 cm de B à D et 6,3 cm de A à C. »
P1 : « C'est comme un rectangle penché. Les grands côtés font 10 cm de longueur. Les petits côtés font 4 cm de largeur. »
P2 : « Ça a 4 côtés. AB mesure 10 cm, BC mesure 4 cm, CD mesure 10 cm et DA mesure 4 cm. Le sommet C dépasse à droite de 2 cm. »
P3 : « Ça a 4 côtés. AB mesure 10 cm, BC mesure 4 cm, CD mesure 10 cm et DA mesure 4 cm. Il y a 15 cm de A à C. »

1. Certains messages permettent de construire une figure unique, d'autres ne permettent pas de construction du tout, d'autres permettent la construction de plusieurs figures. Classer ces messages selon ces trois familles, en justifiant.
2. Analyser en quoi le message L2 contient des renseignements redondants. Le réduire en conservant la possibilité de construction.
3. Un professeur, en examinant ces messages, fait l'hypothèse que les mots « carré », « rectangle » sont connus culturellement mais ne renvoient pas à une caractérisation mathématique précise. Quels messages tendraient à confirmer cette hypothèse ?

Ce type de séquence de classe, qui permet aux élèves de produire de l'écrit fonctionnel, éclaire le professeur sur leurs conceptions. Un enseignement qui consiste simplement à montrer, décrire, nommer des figures simples ne permet pas aux élèves de prendre conscience de ces conceptions et de les faire évoluer.

Dans l'activité précédente, un groupe d'élèves (disposant d'un losange) a rédigé le message suivant : « Il y a quatre côtés. Le premier côté mesure 7 cm, le deuxième mesure 7 cm, le troisième mesure 7 cm, le quatrième mesure 7 cm. C'est comme un carré penché. »
Lorsque les récepteurs reçoivent ce message, ils reproduisent un losange (qui a peu de chance d'être superposable au premier losange !). La confrontation entre la figure ainsi construite et le modèle fait prendre conscience d'une erreur. Le premier souci des élèves est de savoir qui en est responsable : est-ce une erreur de mesurage ? de reconstruction ? Une fois ces hypothèses rejetées, il devient clair que l'erreur relève d'un manque d'information.
Au cours de la séance suivante, les élèves devront mettre au point une autre façon de transmettre l'information. On pourra alors voir apparaître des formulations du type : « Il faut mesurer entre les deux pointes » (mesurer une diagonale).

6.3 LES STRATÉGIES DES ÉLÈVES

Tout enseignant a la possibilité (et le devoir) de s'intéresser aux productions de ses élèves face un travail demandé. L'existence de brouillons, d'effaceurs, de gommes… ne laisse souvent que peu de traces d'un travail de recherche si le maître n'est pas vigilant. Bien souvent, ce n'est que la production finale qui est donnée à voir à l'enseignant. Il lui est alors difficile de retrouver le raisonnement de l'élève, ses hésitations.
Observons les stratégies développées par des élèves dans la recherche d'un problème ouvert[53].

Je pense à trois nombres qui se suivent. Je les additionne. Je trouve 354. Quels sont ces trois nombres ?[54]
ANNE (CM2) écrit successivement :

104	121	114	113	117	117
105	122	115	114	118	118
106	123	116	115	119	119
315	366	355	342	342	354

L'enseignant intervient pour demander à Anne de vérifier son résultat. Anne approche la solution par encadrements mais elle commet à deux reprises des erreurs de calcul.

DENIS (CM1)

118	116	117
118	117	118
118	118	119
354	351	354

Denis recherche des nombres consécutifs proches de 118. Pourquoi part-il de 118 ? On peut supposer qu'il a divisé 354 par 3.

ALEXANDRE (CM1)

151	110 + 111 + 112 = 333	345	117+118+119=354
152	111 + 112 + 113 = 336	456	
153	120 + 121 + 122 = 363	567	
56		789	

53. On qualifie de *problème ouvert*, un problème pour lequel on ne dispose pas a priori de stratégie optimale (en opposition à un problème type). L'IREM de Lyon a développé des recherches sur cette idée de problème ouvert.

54. Ce travail a été proposé par R. Neyret, IUFM de Grenoble.

Alexandre ne termine pas la première addition. Il a sans doute déjà prévu que le résultat ne serait pas 354. Il constate que 110 + 111 + 112 = 333 et que 120 + 121 + 122 = 363. Il a ainsi obtenu une somme inférieure à 354 et une supérieure à 354. Il utilise ce résultat : les deux premiers chiffres sont 1 et 1. Il ne lui reste plus qu'à déterminer les chiffres des unités. En prenant 3.. 4.. 5, il obtient 2 aux unités, il essaie ensuite avec 4.. 5.. 6 puis 5.. 6.. 7 puis 7.. 8.. 9 qui lui donne le bon chiffre des unités. Il peut alors conclure.

CLAIRE (CM1)

3 × 100 = 300   354   5 6 7 18   117
3 × 11 = 33   − 333   6 7 8 21   118
021   119
354

Claire a une démarche intéressante. Elle décompose 354 comme 300 + 33 + 21.
300 = 100 + 100 + 100 ; 33 = 11 + 11 + 11
Elle ramène le problème à la recherche de trois nombres consécutifs de somme 21. Elle trouve 6 + 7 + 8 = 21
donc 354 = (100 + 11 + 6) + (100 + 11 + 7) + (100 + 11 + 8)

JULIE (CM2)

354 = 300 + 11 + 12 + 13 =   14 15 16 45   17+18+19 = 354
54   36   15 16 17 48
12 + 13 + 14 = 39   16 17 18 51
13 + 14 + 15 = 42

Julie, elle aussi, considère un sous-problème : trouver trois nombres consécutifs de somme 54. Au fur et à mesure, elle prend des libertés avec l'écriture, pour aboutir à 17 + 18 + 19 = 354 qui traduit bien l'objectif de sa recherche.

AGATHE (CM2)

354 | 3
024 | 118
0

118 + 118 + 118 = 354
117 + 118 + 119 = 354

Agathe semble proche de la solution experte : « Les trois entiers consécutifs sont n – 1, n, n + 1, leur somme est (n – 1) + n + (n + 1) = 3n = 354. L'entier n est donc 354/3 = 118, les nombres cherchés sont 117,118,119. »

Remarque : Alexandre et Julie prennent des libertés avec les écritures. Dans un travail de recherche, l'organisation des calculs et leur écriture restent personnelles. Le respect de normes deviendra nécessaire dès qu'il faudra communiquer.

D'une manière générale une stratégie de résolution peut être appréciée en terme de :
– efficacité : elle a permis ou non d'obtenir la réponse demandée ;
– pertinence : la procédure permet ou permettrait si elle était conduite à son terme d'obtenir la réponse ;
– complexité : elle mobilise plus ou moins de connaissances ;
– coût : en temps, en calculs … ;
– d'adaptabilité : changement de stratégie en fonction des résultats intermédiaires obtenus ;
– présence de rétroactions : elle permet ou non la régulation de l'action ;
– expertise : elle est plus ou moins proche de la procédure experte.

L'inventaire de ces premiers critères montre qu'il est très difficile de hiérarchiser des procédures sauf par référence à un ou des critères précis.
Voici deux « défis » empruntés une la brochure de l'IREM de Bordeaux[55].

Exercice ***(corrigé page 220)***

1er défi : « Trouver les chiffres »

Trouver les trois chiffres qui composent ce nombre sachant que :

1	2	3	n'a aucun chiffre commun
4	5	6	a un chiffre commun à la bonne place
6	1	2	a un chiffre commun mais mal placé
5	4	7	a un chiffre commun mais mal placé
8	4	3	a un chiffre commun à la bonne place

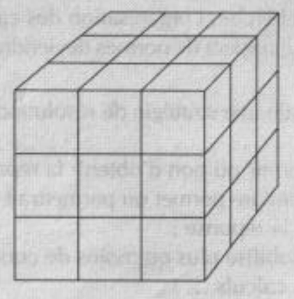
Résoudre le problème posé et expliciter les stratégies utilisées.

Une stratégie efficace de résolution passe par un traitement correct des informations. Au départ, il s'agit d'envisager tous les cas possibles et d'éliminer petit à petit certains chiffres.

55. G. Vinrich : « 50 défis pour petits et grands », IREM de Bordeaux, 1988.

Exercice (corrigé page 221)

2e défi : « Cube »



Imaginez le cube ci-dessus réalisé avec des « petits » cubes non peints. On décide de peindre les 6 faces de ce « grand » cube. Combien de « petits » cubes seront ainsi peints sur 0 face, 1 face, 2 faces, etc.

Résoudre le problème posé et expliciter les stratégies utilisées.

Dans cet exercice, une stratégie efficace passe par l'organisation de la collection des petits cubes en une partition pour pouvoir effectuer ensuite le comptage et contrôler le résultat obtenu.

.4 CADRE ET CHANGEMENT DE CADRE

Généralement, un problème de mathématiques peut être traité selon plusieurs approches.

Exemple :

La voiture de ton papa consomme, en moyenne, 8 l d'essence aux 100 km. Quelle est la consommation d'essence pour un parcours de 320 km ?
Quelle distance a été parcourue si la voiture a consommé 18 l d'essence ?[56]

Ce problème traite de la proportionnalité : en effet, il est raisonnable de considérer, qu'en moyenne, la quantité d'essence consommée est proportionnelle au nombre de kilomètres parcourus (la réalité est en fait différente suivant que l'on circule en ville ou sur autoroute...). Les grandeurs en jeu sont mesurées en litres et en kilomètres.

56. D'après *Objectif Calcul* CM2, Hatier, 1987.

Différentes approches pour la résolution de cet exercice peuvent être envisagées :

Résolution du problème dans le cadre fonctionnel

Soit x la distance parcourue en km et y la consommation d'essence en l. Par hypothèse, $y = 0{,}08x$. On définit ainsi la fonction linéaire f qui lie la consommation d'essence en l à la distance en km.
Nous devons calculer : l'image de 320 par f : f (320) et l'antécédent de 18 : f^{-1} (18)

Résolution du problème dans le cadre numérique :

Distance en km	100	320	?
Consommation en l	8	?	18

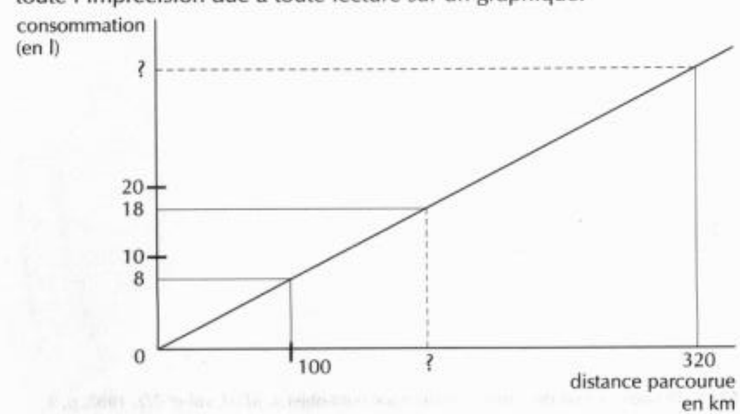
x 0,08

Il convient de compléter le tableau de nombres en utilisant le coefficient de proportionnalité 0,08 (? = 320 x 0,08) ou un déplacement horizontal dans le tableau (320 = 100 x 3,2 donc ? = 8 x 3,2).
f (320) = 0,08 x 320 = 25,6 ou encore f (320) = f (3,2 x 100) = 3,2 x f (100) = 3,2 x 8 = 25,6

$f^{+1}(18) = \frac{1}{0{,}08} \times 18 = 225$

Résolution dans le cadre graphique

En plaçant en abscisse la distance parcourue en km et en ordonnée la consommation d'essence en l, la courbe représentant la fonction qui lie les deux grandeurs est la droite passant par l'origine et le point de coordonnées (100, 8). Après avoir construit cette droite, il reste à déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 320 et l'abscisse du point d'ordonnée 18. Cette méthode suppose un choix correct d'unité sur les axes et garde toute l'imprécision due à toute lecture sur un graphique.



Bien sûr, quelle que soit la méthode choisie, la reconnaissance d'une situation de proportionnalité est indispensable en premier lieu. Il serait réducteur de concevoir la proportionnalité uniquement à travers des exercices portant sur des tableaux de nombres.

La résolution d'un exercice selon telle ou telle approche peut être la conséquence d'un rapport personnel de l'élève à cet exercice ou d'habitudes de classe. Le fait de pouvoir passer d'un cadre de résolution à un autre constitue sans aucun doute une étape nécessaire à l'acquisition d'une notion. R. Douady a étudié cet aspect de l'apprentissage. Reprenons ses définitions :

> **« Un *cadre* est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. […] Le *changement de cadre* est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. »**[57]

Conclusion : En travaillant sur les changements des cadres, l'enseignant va donc permettre à l'élève d'envisager plusieurs approches, plusieurs « éclairages » d'une même notion. Celle-ci ne sera plus totalement assujettie au contexte d'introduction. Le changement de cadre est un moyen privilégié pour permettre de mieux approcher la nature des objets mathématiques.

57. R. Douady : « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *RDM*, vol n° 7/2, 1987, p. 9.

LE STATUT DE L'ERREUR

7

Nous avons observé des stratégies d'élèves. Celles-ci sont pertinentes ou non. Les erreurs commises par les élèves constituent le plus souvent des « symptômes » de l'utilisation de modèles erronés. Il est donc utile de s'intéresser aux erreurs des élèves pour faire des hypothèses raisonnables sur leurs origines.

7.1 ERREUR OU ÉCHEC ?

Les dictionnaires opposent « erreur » et « vérité », alors que « échec » est opposé à « succès ». Nous empruntons les définitions suivantes au *Petit Larousse,* édition 1992.

> ***Erreur :*** **Action de se tromper ; faute commise en se trompant.**
>
> ***Vérité :*** **Caractère de ce qui est vrai ; adéquation entre la réalité et l'homme qui la pense.**
>
> ***Échec :*** **Insuccès, manque de réussite. (vient du persan chah : roi ; cf. échec et mat qui signifie : le roi est mort).**
>
> ***Succès :*** **Résultat heureux, réussite.**

Lors d'une action, nous dirons qu'un élève est en situation d'échec si le résultat obtenu n'est pas conforme à ce qu'il attendait et s'il ne dispose pas de moyens pour tendre vers le résultat au cours d'un nouvel essai. Nous dirons qu'il y a erreur si l'élève peut disposer de moyens pour modifier son action en tenant compte des résultats de l'essai précédent.

Pour avoir conscience de l'existence d'une erreur, un sujet doit au moins avoir une idée a priori, une conception, faire une hypothèse. Sinon, il ne fait que constater un insuccès, un échec. Les erreurs sont le résultat de tout un système de conceptions de l'élève, de ses intuitions, des dispositions qu'il prend pour résoudre les problèmes. L'erreur n'est donc pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard comme les théories empiristes ou behavioristes le laissent penser.

Du point de vue de la relation enseignant-enseigné, selon que l'on se place du côté du professeur ou de l'élève, la relation élève-situation n'est pas vue de la même façon. Ce qui est étiqueté erreur par l'un peut n'être que la perception d'un échec pour l'autre.

Prenons un exemple : lors d'un stage de voile, un stagiaire voyant arriver une « risée » ne « choque » pas la grand-voile. Le dériveur se retourne. Le stagiaire débutant déclare qu'il y avait trop de vent et peut ne pas comprendre ce qui vient de lui arriver. Le moniteur dira « il fallait choquer ta voile ». Le moniteur a interprété l'action et a pointé la cause probable de l'échec. Pour lui, c'est une erreur. Le stagiaire était en échec (provisoire espérons-le). Il lui faudra acquérir certaines connaissances, mêmes implicites, concernant les effets des forces s'exerçant sur le voilier pour qu'il « commence à comprendre ce qui est arrivé ».

Vu du côté du professeur : à partir du fait établi (le voilier retourné) le professeur a su analyser les causes de l'échec. Son savoir sur le maniement d'un dériveur lui permet de donner une explication. À ses yeux, il ne peut s'agir que d'une erreur, puisqu'il connaît les moyens d'y remédier.

Vu du côté du stagiaire : selon les connaissances qu'il peut mettre en jeu, il peut :

- soit ne pas comprendre les raisons du chavirage. Il est alors en échec ;
- soit comprendre après coup et penser pouvoir en tirer les conséquences pour le futur. Dans ce cas, il pourra percevoir son échec comme une erreur.

Il convient donc de distinguer le point de vue de l'enseignant de celui de l'élève. Du point de vue de l'enseignant un échec ponctuel dans une activité mathématique peut renvoyer à une erreur dont il connaît l'origine probable. Mais ce même échec peut ne pas être appréhendé comme une erreur pour l'élève. Il faudrait pour cela qu'il dispose à tous moments des mêmes outils, des mêmes connaissances que l'enseignant. Or ce n'est presque jamais le cas. Le travail de l'enseignant consiste donc à discerner, lors d'une situation mathématique, si la non réussite d'un élève est la manifestation d'une erreur ou un échec.

Remarque : il convient de distinguer l'échec ponctuel de l'échec durable qui peut alors relever d'autres causes.

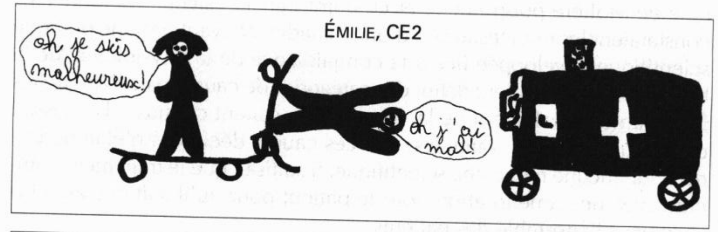
.2 UN ENJEU PSYCHOLOGIQUE POUR L'ÉLÈVE[58]

Les adultes (enseignants, parents…) ont tendance à minimiser l'intensité avec laquelle les erreurs sont vécues dans les apprentissages. Si on demande à des élèves d'écrire autour du mot « erreur » ce qu'il représente pour eux ou de l'illustrer par un dessin[59], on est surpris par la violence de certains sentiments. De nombreux dessins représentent des

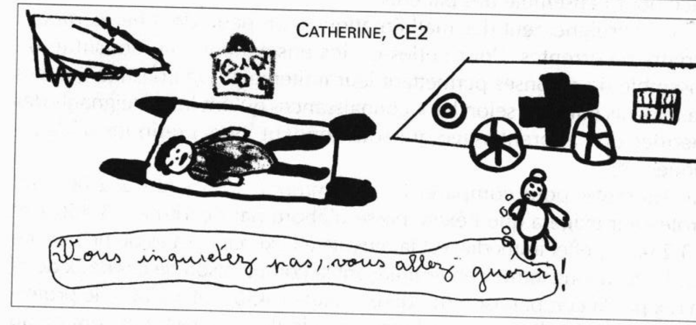
58. On pourra se reporter à *Prendre en compte les erreurs en mathématiques à l'école et au collège*, J. Duverneuil, M.-F. Savioz, M.-C. Chevalier, Collection Savoir et Faire, CRDP Midi Pyrénées.

59. D'après une idée empruntée à l'IREM de Lyon.

accidents, les mots renvoient à des valeurs morales… L'erreur est souvent vécue douloureusement par les enfants :



ÉMILIE, CE2



CATHERINE, CE2

L'enseignant a donc un rôle important à jouer pour dédramatiser l'erreur et montrer sa place dans la construction des connaissances. Dans certaines phases de travail, il peut instituer « un droit à l'erreur ». L'erreur en cours d'apprentissage n'est pas un accident que plus d'attention ou de soin permettrait d'éliminer. C'est un constituant de l'activité cognitive.

3 UN ENJEU DIDACTIQUE POUR L'ENSEIGNANT

Les jugements des enseignants sur les erreurs des élèves dépendent de leur propre rapport aux mathématiques. Pour qui n'a jamais ou peu entretenu des rapports de chercheur avec les mathématiques à quelque niveau que ce soit, l'erreur doit être éliminée. Restaurer la place nécessaire de l'erreur dans les activités mathématiques passera donc par un nouveau rapport personnel aux mathématiques. Le choix du modèle d'apprentissage est lui aussi déterminant. L'erreur n'est pas admise dans un apprentissage dogmatique. Elle doit être corrigée dans un apprentissage de type skinnérien. Elle est constitutive de la connaissance dans un apprentissage de type constructiviste.

Même s'il prend en compte les erreurs des élèves, le professeur est souvent démuni quant aux remèdes à employer. L'erreur dans un processus d'apprentissage est révélatrice d'une hypothèse, d'une conception fausse. Lorsque le professeur constate une erreur et qu'il l'accepte, il doit la traiter. Mais parfois l'origine des erreurs n'est pas simple à identifier. Une comparaison imagée entre les pratiques pédagogiques et la médecine de Molière pourra éclairer ce point : au 17e siècle, les médecins constataient les manifestations d'une maladie. N'ayant pas une pratique scientifique développée liée à la connaissance de la physiologie, de la biologie, etc., ils avaient défini des catégories de causes parmi lesquelles les « humeurs ». Partant de là, les remèdes étaient connus : il s'agissait de mixtures, tisanes, saignées, etc. Les causes déclarées n'étaient fondées sur aucune recherche scientifique. Il suffisait que le traitement coïncide avec une amélioration pour le patient pour qu'il soit déclaré efficace pour l'ensemble des patients.

Dans l'enseignement des mathématiques, on peut identifier certaines erreurs récurrentes. Pour celles-ci, les enseignants ont constitué un ensemble de réponses permettant leur traitement. On constate que ces traitements diffèrent selon les « connaissances qu'ont les enseignants des théories de l'apprentissage qui sous-tendent leurs pratiques pédagogiques »[60].

Par exemple, pour comparer les décimaux « 3,45 » et « 3,234 », tel professeur exigera que l'élève passe d'abord par l'écriture « 3,450 » et « 3,234 ». L'effet immédiat est la réussite à l'exercice. Mais on ne mesure pas l'effet à long terme : en remplaçant la comparaison de ces deux décimaux par la comparaison des deux entiers « 450 » et « 234 », le professeur montre implicitement à l'élève que le décimal se traite comme un couple d'entiers naturels. Il enseigne donc sans le vouloir une conception fausse des décimaux. On sait, en effet que la structure des décimaux n'est pas la même que la structure des naturels. Par exemple, la notion de deux décimaux consécutifs n'a pas de sens.

Exemples d'erreurs

Exercice (corrigé page 221)

Un enfant a eu trois soustractions à effectuer. Deux sont fausses, une est juste.

$$\begin{array}{r} 287 \\ -\ 75 \\ \hline 212 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 369 \\ -\ 295 \\ \hline 134 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1528 \\ -\ 233 \\ \hline 1315 \end{array}$$

Émettre une hypothèse sur une façon de traiter la soustraction qui permet d'obtenir un résultat juste pour la première et 134 pour la seconde puis 1 315 pour la dernière.

60. N. Milhaud, « Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves », DEA, IREM Bordeaux, 1980.

Les élèves sont-ils les seuls à commettre des erreurs ?

Exercice (corrigé page 221)

Voici un exercice et son corrigé extraits d'un ouvrage de mathématiques.

On jette simultanément 3 dés :
1. Trouver la probabilité d'obtenir : a) un seul as ; b) exactement deux as ; c) exactement 3 as.

La solution proposée est la suivante :
La probabilité d'obtenir un as pour un dé est égale à 1/6, celle de ne pas obtenir d'as est donc 5/6 ; pour 3 dés, la probabilité d'obtenir un as est donc égale à :
P1 = 1/6 x 5/6 x 5/6 = 25/216
pour b) : La probabilité d'obtenir 2 as est égale à
P2 = 1/6 x 1/6 x 5/6 = 5/216
pour c) : la probabilité d'obtenir 3 as est égale à :
P3 = 1/6 x 1/6 x 1/6 = 1/216

Voici une autre proposition : P1 = 3 (1/6 x 5/6 x 5/6) puisque l'événement (as) peut se produire au premier, au deuxième ou au troisième dé. Que peut-on penser du corrigé de l'exercice et de cette autre proposition ?

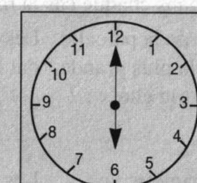
La nature de l'erreur

Erreurs anecdotiques

Exercice traité

Dans l'évaluation CE2 1990, l'exercice suivant était proposé aux élèves :

c) Quelle heure est-il ?



Réponse : il est ....

Un élève répond « 11 h 15 ». Comment interpréter une telle réponse ?

La première idée à laquelle on pense est : l'élève ne sait pas lire l'heure sur une montre à aiguilles. En fait ici, il ne s'agit pas de cela mais qui peut avoir accès à l'explication ? Le test avait lieu en fin de matinée et l'élève a répondu à la question après avoir regardé sa montre !

On a là un exemple trivial de réponse erronée due à une rupture de contrat. En effet, à l'école, lorsqu'on propose le dessin d'une pendule suivi de la question « Quelle heure est-il ? », on demande non pas l'heure qu'il est au moment de la question mais l'heure indiquée par la pendule.

Exercice libre

Imaginer d'autres exemples simples de productions erronées dues à des ruptures de contrat.

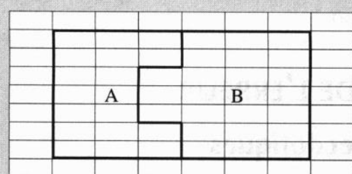
■ Erreurs reproductibles

On retrouve chez plusieurs élèves d'une même classe, de classes différentes, d'une année sur l'autre... les mêmes erreurs.
Elles apparaissent, lorsqu'elles sont prévues par les auteurs, de façon nette dans les résultats statistiques d'une évaluation.

Exercice traité

Voici un extrait des évaluations nationales 1992 en mathématiques à l'entrée en 6ᵉ :

Exercice 36[61]



« Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-dessus. »
Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

a) L'aire de la parcelle A est la plus grande. — Les deux parcelles ont la même aire. — L'aire de la parcelle B est la plus grande.
Explique ton choix :

....

b) Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. — Les deux parcelles ont le même périmètre. — Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.
Explique ton choix :

....

61. Cahier évaluation 6ᵉ, 1992.

Les résultats nationaux donnent 90,6 % de réponses justes à la question portant sur les aires (60 % ayant une justification correcte éventuellement maladroite).
La question sur les périmètres donne 34,5 % de réponses exactes, 40,8 % des élèves affirment que « le périmètre de la parcelle B est plus grand ».
Comment peut-on interpréter ces résultats ?[62]

De telles erreurs sont liées au savoir en jeu et révélatrices d'obstacles (cf. « Obstacles épistémologiques », p. 119). Les travaux récents en didactique des mathématiques analysent ces erreurs en les reliant aux pratiques pédagogiques.
Par exemple, ici, les élèves considèrent qu'aire et périmètre sont des grandeurs liées, qui varient dans le même sens. « Plus l'aire augmente, plus le périmètre augmente ». On voit sans difficulté que la parcelle B est plus grande que la parcelle A (aire (B) > aire (A)). Il semble alors que le contour de B soit plus grand que le contour de A (périmètre (B) > périmètre (A)). On peut regretter que les enfants n'aient pas majoritairement l'habitude de vérifier leurs hypothèses. Ici, la situation s'y prêtait pourtant.
Si une erreur type est commise par un certain nombre d'élèves dans une activité donnée, il est raisonnable de penser que l'erreur dépend moins de l'élève que de l'activité elle-même et des connaissances (justes ou erronées) qu'elle sollicite.

***Exercice** (corrigé page 222)*

En classe de quatrième on a repéré les stratégies suivantes employées par certains élèves pour ranger des nombres décimaux :

S0 : On ne tient pas compte de la virgule, les nombres décimaux sont considérés comme des entiers sur lesquels est plaquée la virgule.
S1 : On range d'abord selon les parties entières et, à partie entière égale, la partie décimale est comparée comme s'il s'agissait d'entiers naturels.
S2 : On range d'abord selon les parties entières et, à partie entière égale, le plus grand des deux nombres est celui qui a le plus de chiffres après la virgule. Si la partie décimale a le même nombre de chiffres, la comparaison s'effectue comme dans les entiers.

1. Donner, pour chacune de ces stratégies :
– une liste de 4 nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement exact ;

62. On pourra se rapporter à l'article « Aires de surfaces planes – Introduction et bibliographie », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII, 1991.

– une liste de 4 nombres décimaux tels que l'application de la règle réalise un rangement faux.
2. Voici un exercice extrait d'un ouvrage de quatrième :

Ranger du plus petit au plus grand les nombres suivants :
4 5,677 3,15 3,14 5,5.

Le professeur se sert de cet exercice dans un contrôle de mathématiques. Le taux de réussite à cet exercice est de 70 %. Que peut-on dire de cette évaluation ?

Quelles pistes suivre pour pouvoir maintenant nous intéresser aux origines des erreurs ? Nous allons conduire notre réflexion du côté de l'élève d'une part, du côté de l'institution et des savoirs d'autre part. Nous allons montrer qu'il est possible d'expliquer l'origine de certaines erreurs et que ces erreurs ne remettent pas en cause l'intelligence ou la vivacité de l'élève.
Nous aborderons les notions de théorème en acte et d'obstacle.

7.5 Théorème en acte

Un *théorème en acte*[63] (ou théorème élève) est un théorème jugé vrai par l'élève et utilisé dans une action. Il permet des prises de décision. Il est plus ou moins implicite. Il a son propre champ de validité mais il produit des résultats faux hors de ce champ de validité.

Exemple : nous venons de voir l'usage massif que font les élèves du théorème suivant : « plus l'aire augmente, plus le périmètre augmente ». Cette affirmation est vraie dans des contextes suffisamment significatifs pour qu'elle soit retenue vraie. On a vu qu'il est pourtant aisé de mettre cette affirmation en défaut.
Autre exemple : « Parmi deux nombres le plus grand est celui qui a l'écriture la plus longue ». Cette règle est vraie dans $\mathbb{N}$, donne un résultat correct dans la comparaison de 3,48 et 1,9 mais devient inadaptée pour comparer 5,48 et 5,9.

63. Concept mis en évidence par G. Vergnaud.

Exercice (corrigé page 222)

Voici 5 règles d'action.
1. *On ne peut diviser a par b que si a est plus grand que b.*
2. *On ne peut soustraire a à b que si a est plus petit que b.*
3. *Quand on multiplie deux nombres, le résultat est plus grand que ces deux nombres.*
4. *Quand on ajoute deux nombres, la somme est plus grande que chacun des ces deux nombres.*
5. *Pour poser une addition en colonne, on « aligne » les chiffres de droite.*

Déterminer, pour chacune son champ de validité (ensembles numériques concernés).

La recherche de théorème en acte constitue une démarche décisive dans la compréhension des erreurs. Dans une interprétation de productions d'enfants, l'explication en terme de règle utilisée en dehors de son champ de validité, est souvent pertinente. Cela permet alors de construire des activités pour mettre en défaut ces règles.

7.6 Obstacle[64]

L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard comme on le croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui dans une situation nouvelle, se révèle fausse, ou simplement inadaptée.
Bachelard écrivait : « l'erreur est constitutive d'une connaissance ». Il affirmait par là même qu'une erreur commise par un sujet dans une activité quelconque révélait un savoir mis en jeu et localement inadapté à l'activité en cours.
Les erreurs de ce type ne sont donc pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles.

Un *obstacle* se manifeste par une famille d'erreurs relatives à un savoir. Ces erreurs sont reproductibles et persistantes. Elles révèlent une connaissance erronée qui a réussi dans tout un domaine d'action, mais qui échoue dans d'autres. Ces erreurs persistent souvent après apprentissage du savoir correct. Le rejet des connaissances qui ont produit ces erreurs fait partie de la connaissance nouvelle.

Piaget parlerait de processus d'accommodation. Prenons un exemple : la comparaison des deux nombres 2,45 et 2,407. Il est assez fréquent de

64. G. Bachelard : *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, 1938.
G. Brousseau : « Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique », *RDM*, vol. 4/2, 1983.

voir des élèves conclure que 2,407 est le plus grand des deux nombres. L'hypothèse raisonnable sur l'origine de cette erreur est que l'élève traite les parties décimales de ces nombres comme des entiers et qu'il compare en fait 45 et 407. Plus tard, chez des étudiants qui savent que 2,45 est plus grand que 2,407, il n'est pas rare de voir cette erreur à nouveau commise lorsque le contexte est difficile et mobilise l'attention. Il s'agit alors d'une résurgence de difficultés rencontrées antérieurement.

L'origine des obstacles peut être classée en grandes familles. On trouvera des obstacles

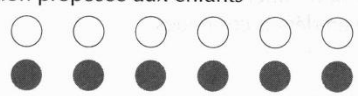
- d'origine ontogénique ;
- d'origine didactique ;
- d'origine épistémologique.

Les obstacles d'origine *ontogénique* sont liés au développement neurophysiologique sujet[65].

Prenons un exemple.
Première situation proposée aux enfants

Collection A

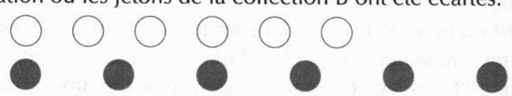
Collection B



Deuxième situation où les jetons de la collection B ont été écartés.

Collection A

Collection B



Par exemple, à un âge donné, un enfant ne peut admettre que la collection B dont on a un peu modifié l'apparence en écartant les jetons a bien le même nombre de jetons que la collection A, alors qu'il l'admettait lorsque les deux collections étaient présentées à l'identique. Ici, le spatial l'emporte sur le numérique. Il s'agit d'un stade de développement de l'enfant. Les tentatives pour précipiter la découverte de la conservation numérique par un apprentissage se sont révélées inefficaces.

Les obstacles d'origine *didactique* sont ceux qui sont provoqués par des choix d'enseignement (institution, enseignant).

Par exemple, le professeur qui enseigne les décimaux à partir de la monnaie va enseigner les décimaux à deux chiffres après la virgule. Dans ce contexte, la comparaison de deux nombres décimaux va se faire en utilisant la comparaison des parties décimales : 2,51 et 2,35 se comparent aisément. Par contre, l'élève peut se trouver démuni devant la comparaison de 2,45 et 5,407 mais surtout, il sera dans l'impossibilité d'imaginer un décimal compris entre 2,45 et 2,46.

65. Cf. les travaux de Piaget et de son « école ».

Les obstacles d'origine *épistémologique* sont étroitement liés au savoir. La construction des connaissances se heurte à, et s'appuie sur ces obstacles.

La connaissance de l'ordre dans les entiers naturels s'oppose, de fait à la connaissance de l'ordre dans les nombres décimaux. C'est dans la nature même des nombres décimaux. Nous venons de voir que cet obstacle de nature épistémologique peut se doubler, par l'action d'enseignement d'un obstacle de nature didactique.

Exercice **(corrigé page 222)**

(histoire vraie) : Un médecin dit à une maman de donner un cm^3 d'un produit pour un kg (poids de l'enfant) par jour à son enfant. La maman a des doutes car son médicament contient un verre doseur marqué en millilitres. Elle appelle le médecin de garde et lui explique. Celui-ci lui dit de mettre 10 fois en millilitres puisque ce sont seulement des millilitres.

Ce médecin a commis une erreur : laquelle ?
Le médecin peut être fatigué. L'erreur est dit-on « humaine ». Mais peut-on faire une autre hypothèse, raisonnable, sur l'origine épistémologique de cette erreur ?

Il est souvent difficile de séparer les origines des erreurs. Par exemple, un élève qui commet une erreur dans la comparaison de « 5,48 » et « 5,6 » peut avoir utilisé le théorème en acte « un nombre qui a l'écriture la plus grande est le plus grand » (obstacle de nature épistémologique), ou parce que le système enseignant a convaincu l'élève qu'un décimal se traitait comme un couple de deux entiers (obstacle de nature didactique).
Dans toute analyse de productions il est important de relever les erreurs, de les rattacher aux obstacles épistémologiques connus à propos du savoir en jeu.

Il est donc illusoire de vouloir éviter à tout prix les erreurs dues à des obstacles. Bien au contraire, ces obstacles font partie du processus cognitif et doivent être dépassés par les élèves. Pour cela, le professeur doit mettre en place des situations où des rétroactions nettes feront prendre conscience de l'erreur.

L'ERREUR PRISE EN COMPTE

Les erreurs des élèves dans des exercices mettant en jeu les nombres décimaux sont prévisibles.
Elles correspondent généralement à deux représentations différentes des décimaux :
R1 : Un décimal est constitué de deux entiers séparés par une virgule.
R2 : Un décimal est un codage particulier (lié à un choix d'unité) d'un nombre entier.
Nous allons montrer à travers l'étude d'une activité[66] comment un enseignant de CM1 peut faire émerger ces représentations et les faire évoluer.

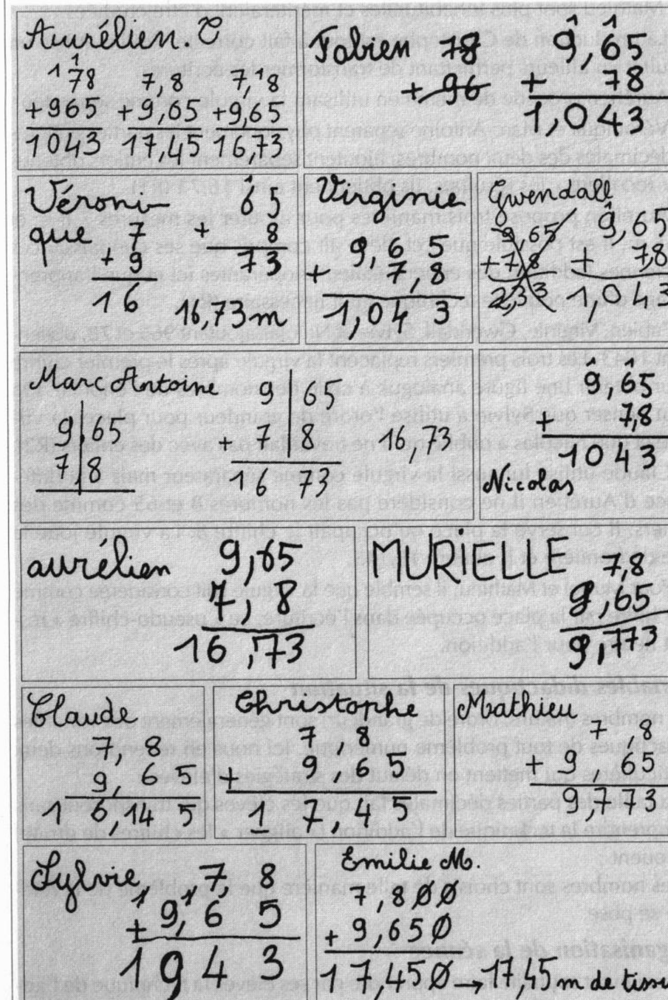
> Nous projetons de fabriquer des rideaux pour les deux salles de classe du premier étage. Les mesures faites indiquent qu'il faut 7,8 m de tissu pour la première salle et 9,65 m pour la deuxième. Qu'allons-nous faire ?

Il demande aux élèves de proposer une solution.
Ceux-ci ont étudié les nombres décimaux, ils identifient facilement, ici, un problème additif. Ils n'ont pas encore appris, dans le cadre de l'école, à ajouter les nombres à virgule.
L'enseignant compte sur la confrontation des résultats obtenus pour aboutir à son objectif : constater qu'avec les connaissances disponibles du moment on arrive à des réponses différentes alors que l'on conçoit l'existence d'un résultat unique.

66. Activité proposée par J.-J. Di Scala, Instituteur Maître Formateur Cahors.

Exercice traité

Voici les solutions proposées par les élèves.



1. Analyser ces productions en les rapportant lorsque cela est possible à une des représentations citée page 120.
2. Identifier les principales variables didactiques de la situation. Émettre des hypothèses relatives à celles (implicites) que les enfants font pour définir l'addition de deux décimaux.

Analyse des productions

Les représentations qui émergent dans les productions de Claude, Muriel ou Mathieu sont plus inhabituelles et mériteraient d'être étudiées.

- La production de Christophe est tout à fait correcte. Émilie utilise un résultat vu ailleurs permettant de transformer les écritures.
- Aurélien procède de même en utilisant la virgule comme séparateur.
- Véronique et Marc-Antoine séparent physiquement les parties entières et décimales des deux nombres, ajoutent séparément les entiers obtenus et « recollent » les résultats. Ils obtiennent ainsi 16,73 (R1).
- Aurélien propose trois manières pour ajouter les mesures 7,8 m et 9,65 m. Il est possible que cet élève ait compris que ses connaissances anciennes (addition des entiers) étaient inopérantes ici et que l'apprentissage d'une nouvelle technique était nécessaire (R1).
- Fabien, Virginie, Gwendall, Sylvie et Nicolas ajoutent 965 et 78, obtiennent 1043. Les trois premiers replacent la virgule après le premier chiffre pour obtenir une figure analogue à celle des nombres de l'énoncé. On peut penser que Sylvie a utilisé l'ordre de grandeur pour placer la virgule et que Nicolas a oublié qu'il ne travaillait pas avec des entiers (R2).
- Claude utilise lui aussi la virgule comme séparateur mais à la différence d'Aurélien il ne considère pas les nombres 8 et 65 comme des entiers. Il conserve la place qu'occupait le chiffre 8. La virgule joue le rôle de frontière et il obtient 16,145.
- Pour Muriel et Mathieu, il semble que la virgule soit considérée comme un chiffre par la place occupée dans l'écriture, ce « pseudo-chiffre » restant neutre pour l'addition.

Variables didactiques de la situation

Les nombres (nature, ordre de grandeur) sont généralement des variables didactiques de tout problème numérique. Ici nous en retiendrons deux particulières qui mettent en défaut des stratégies d'élèves :

– la taille des parties décimales fait que les élèves qui transposent sans comprendre la technique de l'addition (« aligner » les chiffres de droite) échouent ;

– les nombres sont choisis de telle manière que le problème de la retenue se pose.

Organisation de la séance

L'enseignant souhaite faire apprendre par ses élèves la technique de l'addition des « nombres à virgule ». Il conçoit donc un dispositif d'enseignement : une phase de recherche, un temps de confrontation des résultats, un apport d'information sur la technique d'addition. Le problème tel qu'il est proposé aux élèves (le problème des rideaux), ne permet pas à ceux-ci de deviner l'intention du maître. La situation démarre par une phase a-didactique d'action et de formulation.

Dans la phase de recherche, les élèves engagent des connaissances, prennent des décisions, produisent un résultat. Ils sont responsables, au sens de la connaissance, de leurs productions.

Lors de la confrontation des résultats, on peut penser que les élèves auront à expliquer leurs démarches, développer des preuves et des arguments sans que le maître ne s'impose en détenteur du savoir.

Étude des rétroactions

Les rétroactions se situent essentiellement dans la confrontation des résultats car la référence à l'ordre de grandeur qui aurait pu être faite par ceux ayant trouvé 1,043 est inutile pour ceux ayant obtenu 16,145 par exemple. L'enseignant fonde donc son travail sur le débat qui va permettre de construire l'addition des décimaux à partir des productions d'élèves. La situation montre-t-elle vraiment que tel procédé de calcul est correct ou non ? Pour cela, il faudrait concevoir des rétroactions qui ne se réduisent pas au discours. On peut imaginer :

– un travail expérimental (un groupe d'élèves mesurant effectivement) ou bien

– la transformation des mesures exprimées en centimètres : cela ramène le problème à un problème connu (dans les entiers naturels mais présente des inconvénients).

Institutionnalisation

Après ce temps de validation, le maître peut présenter la technique nouvelle comme réponse au problème rencontré par les élèves et l'officialiser. Les connaissances anciennes, aligner les chiffres de droite ou convertir en centimètres, sont inadaptées. La première procédure produit un résultat faux, la deuxième est coûteuse et trop contextualisée.

Conclusion :

Dans cette situation l'enseignant s'appuie sur les productions des élèves et les erreurs inévitables. Il parie sur le fait que les élèves sont prêts à reconnaître la nouvelle technique comme outil adapté au problème posé mais aussi à tout autre contexte où intervient l'addition des décimaux. Certains élèves comme Émilie ou Christophe ont utilisé implicitement la bonne technique mais ils ont eux aussi besoin d'apprendre. La connaissance privée qu'ils viennent d'utiliser doit être reconnue, décontextualisée.

Cette démarche montre que le professeur prend en compte les erreurs des élèves.

LA DÉMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES[67]

8

La démonstration occupe en mathématiques une place centrale. Elle joue un rôle très important dans la scolarité dès l'âge de 12-13 ans. Or l'école élémentaire ne prend pas la démonstration comme objet de savoir, mais, plus encore, n'en imagine pas vraiment la genèse, et ne prévoit pas les activités qui optimiseraient sa mise en place future.

Trop souvent on assimile démonstration et raisonnement déductif. Mais réduire la démonstration au raisonnement déductif efface toutes traces des questionnements, des zones d'instabilité, des tensions qui sont les préludes au désir et au besoin de démontrer.

C'est en explorant son histoire que nous relativiserons cette notion de démonstration dans le domaine des mathématiques.

8.1 ARGUMENTATION ET DÉMONSTRATION

« L'*argumentation* est ce mode de raisonnement qui est intrinsèquement lié à l'utilisation de la langue naturelle.

À ce titre, elle apparaît être le mode naturel du raisonnement. Elle est, en effet, spontanément mise en œuvre dans toutes les situations où un avis, une affirmation, une opinion, un choix peuvent être mis en doute et requièrent une justification, cela aussi bien dans les situations de discussion réelle avec des interlocuteurs que dans des situations d'interrogation ou de recherche en dehors de toute discussion réelle avec quelqu'un […]. Étant donné que l'argumentation constitue le mode naturel du raisonnement et qu'elle peut prendre des formes discursives plus ou moins organisées, deux questions didactiquement importantes se posent. Dans quelle mesure le recours à des situations qui mobilisent spontanément l'argumentation ne favoriserait-il pas la découverte de la démonstration, de sa nécessité et de ses procédures ? Et dans quelle mesure un travail d'apprentissage sur l'argumentation est-il possible ? »[68].

Précisons le sens que nous attribuons aux termes « explication », « preuve », et « démonstration »[69].

Une *explication* constitue un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, acceptées ou refusées.

Convenons qu'une *preuve* est une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné.

Une *démonstration* est une preuve acceptée par la communauté des mathématiciens et qui revêt une forme particulière : utilisation d'un langage spécifique, référence à une théorie.

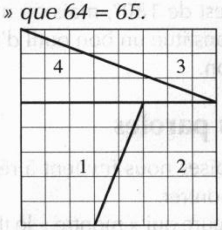
L'emploi de la démonstration comme outil de preuve semble caractériser les mathématiques parmi les sciences. Le répertoire utilisé pour bâtir une démonstration est commun au locuteur et à l'interlocuteur. Il s'appuie donc sur des références communes, un lexique commun, des représentations communes… Chaque démonstration contient une part d'implicite (sens de tel mot du vocabulaire, anticipation du niveau de lecture du futur lecteur, connaissance de tel résultat…). Une des difficultés rencontrées par les élèves en mathématiques est de définir ce qui peut rester implicite et ce qui doit être explicité lors d'une rédaction de démonstration.

8.2 QUELQUES EXEMPLES HISTORIQUES

Montrer ou démontrer

Exercice **(corrigé page 222)**

Voici un paradoxe célèbre (dû à Lewis Caroll) ou comment après découpage du carré selon les traits et reconstitution dans un rectangle, on « montre » que 64 = 65.

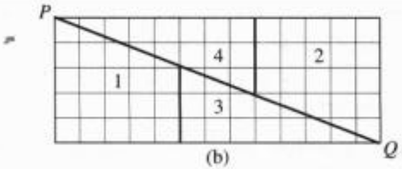


(a)

67. Une partie de ce chapitre utilise l'article de Gilbert Arsac : « L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique », *RDM*, vol. 8/3, 1987.

68. R. Duval : « Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? » *Petit X*, n° 31 (1992-1993), p. 59.

69. On pourra se référer à la thèse de N. Balacheff : « Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège » (Grenoble 1988).

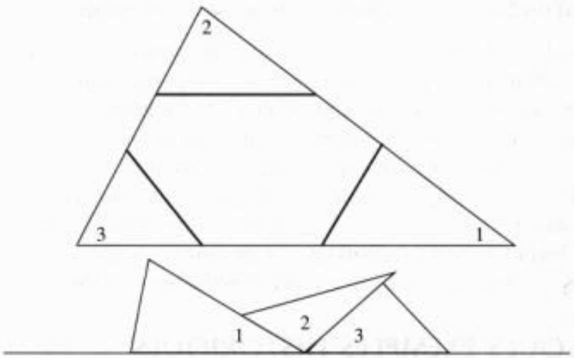


(b)

1. D'où vient le paradoxe ?
2. A-t-on « montré » que 64 = 65 ? Une telle activité a-t-elle une utilité pédagogique ?

Exercice **(corrigé page 223)**

Voici une façon de montrer par découpage que la somme des angles d'un triangle est de 180°.

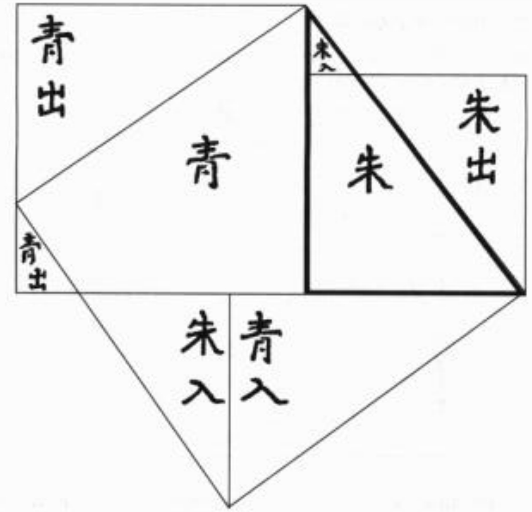


Faire un parallèle avec l'exercice précédent.

La technique du découpage qui vient d'être utilisée dans les deux cas précédents montre tout à la fois son intérêt et ses limites en tant qu'outil de preuve. On montre que 64 = 65 comme on montre que la somme des angles d'un triangle est de 180°, mais on n'a rien démontré. Pour autant, cette technique constitue un bon outil d'investigation, de représentation, de mémorisation.

Démontrer sans paroles

Les mathématiques chinoises nous invitent à réfléchir sur la forme du discours à tenir pour démontrer.
Voici, par exemple, une figure qui « montre » le théorème de Pythagore : rappelons que le théorème de Pythagore affirme que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse (le plus grand côté) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Dans cette figure, le triangle rectangle est en gros traits.



Traduction des idéogrammes employés :

Signe	Traduction
青	bleu
朱	rouge
出	sort
入	entre

Cette figure sans paroles (ou presque) donnait à voir le résultat et constituait une démonstration.
De telles démonstrations reposaient sur un ensemble de procédés ingénieux qui constituaient une véritable « algèbre géométrique ».

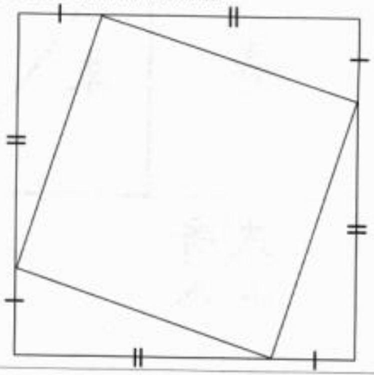
Exercice **(corrigé page 223)**

Retrouver la démonstration qui est « rédigée » sur ce dessin en se référant à la traduction.

Aide : On remarque trois carrés dessinés sur la figure et deux catégories de signes : ceux qui traduisent des couleurs et ceux qui traduisent des actions.

Exercice *(corrigé page 223)*

À l'aide de cette autre représentation (ci dessous), retrouver, là encore, le théorème de Pythagore.

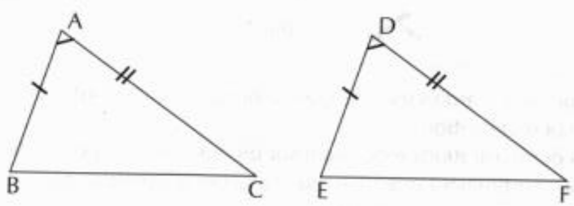


Aide : Sur cette figure on « voit » deux carrés. Le triangle rectangle qui sera l'objet du travail se retrouve quatre fois.

Démontrer en décrivant une action

Voyons à présent une démonstration proposée par Euclide (proposition 4 du livre I).

Il s'agit du second cas d'égalité des triangles qu'il énonce ainsi « Si deux triangles ABC et DEF ont leurs deux côtés AB et AC respectivement égaux aux deux autres côtés DE et DF, et si les angles BAC et EDF compris entre les côtés égaux sont égaux, alors ces deux triangles auront leur bases BC et EF égales, les triangles seront égaux et les angles restants opposés aux côtés égaux, ABC et DEF, ACB et DFE seront égaux chacun à chacun. »



La démonstration est la suivante :

« Superposons le triangle ABC sur le triangle DEF et pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E puisque AB = DE. ensuite, AB étant placé sur DE, et l'angle BAC étant égal à l'angle EDF, AC prendra la direction de DF, et puisque AC = DF, le point C tombera sur le point F, BC coïncidera avec EF, car,

s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, renfermeraient entre elles un espace, ce qui est impossible. »

On imagine bien des professeurs refusant cette rédaction[70] en tant que démonstration… et pourtant il s'agissait d'Euclide…

Exercice commenté *(page 223)*

Retrouver les autres cas d'égalité des triangles et démontrer leur validité en construisant des démonstrations s'inspirant de la démarche d'Euclide.

Démontrer en conceptualisant

Au V[e] siècle av. J.-C., la pensée pythagoricienne repose sur deux idées fortes :

– tout est nombre (nombres entiers) et rapport de nombres (nombres rationnels) ;

– il y a un syncrétisme physico-mathématique, c'est-à-dire une identification des objets mathématiques aux objets réels.

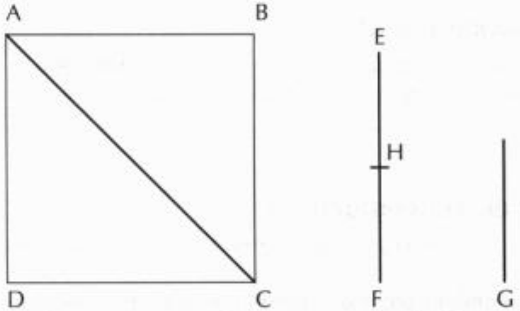
À cette époque, lorsque l'on utilisait le théorème de Pythagore pour calculer la mesure de la diagonale d'un carré, on était amené à se servir de techniques de calcul qui donnaient une valeur approchée. Dans ce cadre, les problèmes pratiques trouvaient toujours leur solution. Pourtant, la nature du rapport entre la mesure du côté du carré et celle de la diagonale devient un objet d'interrogation. On se détache des objets physiques pour des considérations sur les nombres. Il ne s'agit plus seulement de mesurer mais de savoir si on peut trouver une même unité qui permettrait d'exprimer, avec des entiers, les mesures de la diagonale et du côté. En d'autres termes, ces grandeurs sont elles commensurables ? Ainsi débute la « crise des irrationnels ».

Le rapport entre la diagonale et le côté du carré est $\sqrt{2}$ (le carré de la diagonale d'un carré de côté a est $a^2 + a^2 = 2a^2$). On démontre que ce nombre n'est pas rationnel (d'où le nom d'irrationnel). En voici une antique démonstration. On la doit à Aristote (démonstration par l'absurde). Cette démonstration met à mal la théorie des proportions des pythagoriciens, car cette dernière reposait sur la commensurabilité des grandeurs géométriques. Voici la démonstration.

70. Lorsque des enfants travaillent sur des figures dans des activités de communication écrite, on se rend compte que leur travail est étonnement proche des préoccupations d'Euclide.

Démonstration de l'époque [71]

Nous la transcrivons dans son intégralité afin de permettre au lecteur de constater le chemin parcouru dans la clarification des concepts et dans la rédaction des démonstrations[72].



Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.
Soit le carré ABCD et que AC soit sa diagonale ; je dis que la droite AC est incommensurable en longueur avec AB.
Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible ; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait impair et pair.
Car il est évident que le carré de AC est double du carré de AB. Mais AC est commensurable avec AB. La droite AC a donc avec la droite AB le rapport qu'un nombre a avec un nombre.
Que AC ait avec AB le rapport que le nombre EF a avec le nombre G et que les nombres EF et G soient les plus petits de ceux qui ont le même rapport qu'eux.
Le nombre EF ne sera pas l'unité.
Car si EF était l'unité, à cause que EF a avec G le rapport que AC a avec AB, et que AC est plus grand que AB, l'unité EF serait plus grande que le nombre G, ce qui est absurde. EF n'est donc pas l'unité. EF est donc un nombre.
Et puisque CA est à AB comme EF à G, le carré de CA sera au carré de AB comme le carré de EF est au carré de G.
Mais le carré de CA est le double du carré de AB. Le carré de EF est donc double du carré de G. Le carré du nombre EF est donc pair.
Le nombre EF est donc pair, car s'il était impair, son carré serait impair. Parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair. Le nombre EF est donc un nombre pair.
Partageons le nombre EF en deux parties égales en H. Puisque les nombres EF et G sont les plus petits de ceux qui ont le même rapport, ces nombres seront premiers entre eux. Mais le nombre EF est pair.
Le nombre G est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EF et G qui sont premiers entre eux, seraient mesurés par deux : parce que tout nombre pair a une

---

71. J. Itard : *Essai d'histoire des mathématiques*, Librairie de science et technique J. Blanchard, 1984. Cette démonstration figure dans le livre X des éléments d'Euclide.

72. Cette transcription est tirée de l'ouvrage de J. Itard et P. Dedron : *Mathématiques et mathématiciens*, Éd. Magnard, 1959.

partie qui en est la moitié. Ce qui est impossible. Le nombre G n'est donc pas un nombre pair : il est donc impair.
Mais EF est double de EH. Le carré de EF est donc quadruple du carré de EH. Mais la carré de EF est double du carré de G. Le carré de G est donc double du carré de EH. Le carré de G est donc pair. Le nombre G est donc pair, d'après ce qui a été dit. Mais il est aussi impair, ce qui est impossible. La droite AC n'est donc pas commensurable en longueur avec AB. Elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

Explication de la démonstration

D'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 2AB^2$ donc $\frac{AC^2}{AB^2} = 2$. Si le rapport $\frac{AC}{AB}$ est un rationnel, alors il existe deux segments qui sont dans le même rapport et qui sont les plus petits. (Il existe une fraction irréductible égale à $\frac{AC}{AB}$. Cette fraction irréductible est $\frac{EF}{G}$. [G est la mesure d'un segment : cf. figure].) Alors $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{EF^2}{G^2}$ donc $EF^2 = 2G^2$ donc EF est pair, donc EF^2 est multiple de 4. Alors G^2 est pair, donc G est pair, donc $\frac{EF}{G}$ n'est pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc le rapport ne peut être un rapport de deux nombres entiers.
Cette démonstration mêle les segments et les nombres. Nous avons volontairement, dans la démonstration, laissé cette ambiguïté.

Propriétés utilisées

– Existence d'une fraction irréductible.
– Si un nombre est pair, son carré est multiple de 4.
– Si un carré est pair, alors le nombre est pair (peut se démontrer par l'absurde).

Démonstration actuelle

Supposons qu'il existe une fraction (donc une fraction irréductible) égale à $\sqrt{2}$.
on a : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ donc $a^2 = 2b^2$. Alors a^2 est pair donc a est pair (théorème d'arithmétique). a étant pair, il existe a' tel que a = 2a'. On a alors : $4a'^2 = 2b^2$, et donc : $2a'^2 = b^2$. Donc b^2 est pair et par suite b est pair.
a et b sont pairs donc la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

8.3 LES PREMIÈRES FORMES DE DÉMONSTRATION : UN ENJEU À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Il y a des formes de raisonnement utilisées dans la vie familiale, sociale, scolaire qui pourraient être plus sollicitées lors d'activités mathématiques. En 1985, un projet de fiche d'accompagnement aux instructions officielles définissait différents modes de raisonnement que l'on peut rencontrer à l'école élémentaire.
On y trouvait les termes « contre exemple », « disjonction des cas », « contraposition », « test d'hypothèse ».

Le *contre exemple* est une forme de raisonnement qui permet de nier la généralité d'une proposition à l'aide d'un exemple. On l'utilise dans un contexte d'argumentation pour invalider une réponse.

Exemple : la proposition selon laquelle « tous les multiples de 4 ont comme chiffre des unités 4 ou 8 » est fausse ; il suffit, pour le prouver, de montrer 36.

La *disjonction des cas* est une forme de raisonnement qui permet d'affirmer une proposition en faisant l'inventaire de tous les cas possibles et en s'assurant à chaque fois, de leur validité.

Exemple : Les nombres premiers compris entre 4 et 20 sont 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19.
Preuve :
5 n'est divisible que par 1 et lui-même.
6 est divisible par 3
7 n'est divisible que par 1 et lui-même.
8 est divisible par 2, etc.

La *contraposition* est une forme de raisonnement souvent utilisée. Pour prouver que d'une première affirmation en découle une deuxième on montre que, de la négation de la deuxième découle la négation de la première.

Exemple : Si j'étais voleur, je ne ferais pas la manche. Si je fais la manche c'est que je ne vole rien.

Le *test d'hypothèse* (méthode par essais et erreurs) est une forme de raisonnement qui permet de procéder par ajustements successifs.

Exemple : on dispose d'une somme de 100 F constituée de 16 pièces de 5 F et de 10 F. Combien de pièces de chaque sorte ?
hyp. 1 : les 16 pièces de 5 F – test : 80 F
hyp. 2 : les 16 pièces de 10 F – test : 160 F

hyp. 3 : 1 pièce de 5 F et 15 de 10 F – test : 155 F
et ainsi de suite...
On peut toutefois faire une hypothèse plus générale : puisque 100 F est plus près de 80 F que de 160 F, on peut penser qu'il y a plus de pièces de 5 F que de 10 F d'où un resserrement des hypothèses...

Remarque : ce raisonnement est très souvent utilisé en mathématiques mais aussi dans la vie quotidienne pour rechercher des solutions à des situations pour lesquelles on ne dispose pas forcément d'outils immédiats.

Ainsi, dès l'école élémentaire, il est possible de s'appuyer sur des modes de raisonnement utilisés dans la vie de tous les jours pour résoudre des situations-problèmes, tout en sachant qu'il n'y a pas identité entre la logique naturelle et la logique formelle.

On a pu voir que la démonstration en mathématiques ne se réduisait pas à l'image que l'on peut s'en faire habituellement, c'est-à-dire un type de tâche attendue dans la classe pour certaines tranches d'âge.

Nous emprunterons la conclusion à E. Barbin[73] : « On comprend que la démonstration ne soit pas une voie royale tracée de toute éternité. Situer la démonstration dans l'histoire (il pourrait s'agir de l'histoire de l'individu, *note des auteurs*), c'est aussi se garantir de la « méprise » qui consiste à croire que la démonstration est univoquement définie, c'est être obligé de penser sa diversité. Les fondements de la démonstration se transforment, le sens de la démonstration se modifie, les formes de la démonstration changent, le sentiment d'évidence varie avec l'histoire. »

---

73. Ouvrage collectif : *La démonstration mathématique dans l'histoire*, p. 5, 7e colloque inter-IREM d'épistémologie, Besançon, 1989.

2e PARTIE

UN CADRE THÉORIQUE POUR UNE PROFESSIONNALISATION

Tout au long de la première partie, nous avons rencontré des problèmes posés à l'enseignement des mathématiques et découvert les premiers concepts de didactique. Il paraît dès à présent évident que la professionnalisation est une étape obligée de la formation des enseignants et que la didactique des mathématiques peut fournir un cadre théorique à cette professionnalisation.

LA DIDACTIQUE : UNE SCIENCE RÉCENTE

1

Les tous premiers concepts de didactique que nous avons rencontrés ont permis de poser de manière nouvelle les problèmes d'enseignement. Dans cette deuxième partie, nous nous intéressons de façon plus précise au contexte théorique dans lequel se constitue cette nouvelle science : la didactique des mathématiques.

1.1 DIDACTIQUE D'UN CHAMP DE CONNAISSANCES

Le mot « didactique » se rencontre de plus en plus fréquemment dans le langage courant sans que l'on sache réellement à quelle signification il renvoie. Par exemple, dire d'un film qu'il est didactique peut signifier qu'il a permis d'apprendre quelque chose, mais dans la bouche de certains critiques, c'est quelquefois synonyme d'ennui. Dans le milieu de l'enseignement, les termes didactique et pédagogie sont souvent confondus. Pourtant, du point de vue des didacticiens, il s'agit bien de deux disciplines différentes.

La *didactique* d'un champ de connaissances est la « science s'intéressant à la production et la communication de ces connaissances, dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances. »[74]

Nous retiendrons cette nouvelle définition qui vient compléter celle déjà donnée page 26. Dans cette perspective, la didactique n'est pas réductible à la pédagogie. En effet, pour en revenir aux mathématiques, « une des ambitions de la didactique est d'essayer de préciser le plus scientifiquement possible les véritables marges de manœuvre de tout enseignant de mathématiques dans sa classe, en analysant le fonctionnement de l'ensemble du système et de chaque composante, puis de développer et d'étudier certains choix, jugés optimaux dans la gestion globale et locale de la classe. Dans cette perspective, la pédagogie serait l'application en

74. Le lecteur pourra trouver l'ensemble des sens de ce mot dans « Didactique des mathématiques : définitions et commentaires », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII,1991. Article de G. Brousseau sur le mot « Didactique ».

situation, avec tout ce que cela comporte encore de décisions à prendre sur l'instant, d'éléments plus théoriques, issus des connaissances didactiques »[75]. On comprend alors qu'il n'existe pas de didactique générale mais une didactique des mathématiques, une didactique du français langue naturelle… alors que l'on parle volontiers de pédagogie générale.

.2 Objets d'étude de la didactique des mathématiques

L'enseignement en milieu scolaire met en relation trois pôles : l'élève, le professeur, le savoir. Chacun de ces pôles a une histoire particulière dont une part lui est propre et une autre se fonde sur les *interactions* avec les deux autres. Le fonctionnement de l'enseignement peut être expliqué en étudiant chacun de ces *trois pôles,* mais aussi en observant les modifications que subissent chacun d'eux au contact des deux autres :

– l'école met les enfants au contact de savoirs au sein d'une institution : ils deviennent alors **élèves**. Elle remplit, de ce fait une fonction de socialisation ;

– le **professeur**, personne privée, devient gestionnaire de l'évolution des savoirs ;

– le **savoir** lui-même, pour être accessible aux élèves, subit des transformations inévitables.

De plus, ces trois pôles et leurs relations sont « plongés » dans un milieu qui est celui du système éducatif. Enfin, ce triangle de la relation didactique est soumis au temps : temps scolaire et temps des apprentissages. En définissant son champ d'études, la didactique souhaite apporter des réponses à la question de l'enseignement des mathématiques, mais « elle ne se borne pas, comme certains le pensent naïvement, à rechercher de meilleurs moyens d'enseigner un objet de connaissance donné. Loin de considérer la connaissance à enseigner comme définie à l'avance et intangible, elle peut et doit au contraire la remettre profondément en cause. La didactique permet en effet de prendre en compte les contraintes imposées par le développement des connaissances chez l'enfant, l'adolescent ou l'adulte ; elle éclaire l'épistémologie du savoir concerné et les fonctions théoriques et pratiques qu'il remplit ; elle étudie les inévitables transformations que l'enseignant fait subir aux contenus de connaissances, et contribue ainsi à la clarification des objectifs sociaux de l'enseignement et de l'éducation »[76].

75. A. Robert : « Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants) », *Cahier de didactique des mathématiques,* n° 50, IREM de Paris VII, 1988.

76. « Didactique et acquisition des connaissances scientifiques », CNRS, Session d'automne 1985, rapport d'activité du GRECO.

Cet ensemble de pistes de recherches mobilise inévitablement d'autres domaines du savoir que celui des mathématiques.

1.3 Champs connexes de la didactique des mathématiques

Pour explorer tous ces sujets d'étude, la didactique des mathématiques est amenée à côtoyer d'autres champs de la connaissance qui ont des rapports de similitude ou de dépendance avec elle ; en premier lieu, bien sûr, les **mathématiques**, l'**épistémologie** des mathématiques, mais aussi la **sociologie** (on est en présence d'un projet social, culturel), la **sémiologie** et la **linguistique** (il s'agit de communication), la **psychologie** (plus particulièrement la psychologie cognitive, les théories de l'apprentissage, l'épistémologie génétique). Elle utilise les travaux récents sur la **docimologie**[77], l'**évaluation**… Elle puise donc dans chacun de ces domaines, et se constitue en science par ses questionnements propres.

Prenons l'exemple des liens entre la didactique et la psychologie. Nous avons évoqué page 24 les principales théories de l'apprentissage. Elles génèrent des conceptions différentes de l'enseignement :

• La conception de la tête vide : l'élève est, au départ, une « tête vide » que l'enseignant va remplir. La communication est en fait une communication à sens unique basée essentiellement sur le principe de l'exposé des savoirs. En cas de difficulté, la relecture, la réexplication sont les seules procédures prévues par le système. À cela, deux objections peuvent être avancées : la réexplication s'avère le plus souvent inefficace dans bon nombre de situations. D'autre part, les élèves ont toujours des idées a priori, des connaissances anciennes qui vont interférer avec l'exposé.

• La conception de l'aide « pas à pas » : par une maïeutique savante, le système conduit l'élève à produire un résultat en décomposant son travail en de nombreuses étapes intermédiaires. Or, savoir effectuer des sous-tâches ne permet pas de comprendre et d'effectuer la tâche dans son intégralité.

• Les didacticiens, dès le début de leurs recherches, ont retenu des travaux issus de la psychologie génétique. Par référence aux travaux de Piaget, ils retiennent le caractère constructiviste de l'acquisition des connaissances en mathématiques. C'est en résolvant des problèmes, en agissant que l'enfant apprend, donne du sens aux objets mathématiques, construit ses connaissances. De plus, l'apprenant s'adapte à la réalité selon deux processus :

77. Étude systématique des facteurs déterminant la notation des examens et des concours. *Petit Larousse illustré,* 1991.

– ou bien l'action et ses effets ne s'opposent pas aux conceptions antérieures et les résultats sont intégrés où ignorés (processus d'assimilation) ;
– ou bien l'action et ses effets provoquent des contradictions telles, du point de vue de l'apprenant, que la connaissance passe d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre par la remise en cause des connaissances antérieures. Surmonter ce moment de déséquilibre suppose une réorganisation des connaissances antérieures au cours de laquelle les nouveaux acquis sont intégrés aux acquis anciens (processus d'accommodation).

• D'autres travaux influent sur les recherches en didactique des mathématiques. Par exemple, retenons les résultats de Bruner, psychologue américain, qui étudie l'acquisition du langage et le développement cognitif de l'enfant. Il travaille en particulier sur l'anticipation, permettant une vérification dans une tâche donnée, comme moteur de l'apprentissage. Ce sont aussi les travaux de Vygotsky[78], psychologue soviétique, qui portent spécialement sur l'influence déterminante des processus socioculturels, du langage sur les apprentissages.

Conclusion : La modélisation proposée par les didacticiens repose donc sur une hypothèse forte concernant le sujet apprenant : « L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est un facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage. »[79]

78. Vygotsky est né en 1896. Il se consacre jusqu'à sa mort à la psychologie à l'institut de psychologie de Moscou (avec Léontiev et Luria). Il meurt en 1934 après avec écrit « pensée et langage ». Son travail a tardé à être connu en occident (1962). Les thèmes essentiels de l'œuvre de Vygotsky sont d'abord se donner des principes méthodologiques qui donnent du crédit aux résultats expérimentaux. Il affirme aussi la nature socio-historique du psychisme humain et cherche l'explication des phénomènes dans l'histoire et le développement des individus. Enfin, il affirme l'influence déterminante des processus socio-culturels sur les processus mentaux supérieurs en tant que médiateurs. Il étudie particulièrement la médiation sémiotique dans l'analyse du langage intérieur (langage pour soi) et étudie aussi le processus d'apprentissage comme un travail d'assistance entre l'enfant et l'adulte, l'adulte agissant comme médiateur de la culture. Partant de là, Vygotsky développe le fait que le seul apprentissage valable pendant l'enfance est celui qui anticipe sur le développement (selon une marge déterminée) et le fait progresser. Il définit la « zone proximale de développement ».

79. G. Brousseau : « Fondements et méthodes de la didactique », *RDM*, vol. 7/2, 1986.

VERS UNE PROFESSIONNALISATON 2

2.1 LES DÉRIVES ACTUELLES

Donner une formation professionnelle aux enseignants n'est pas une préoccupation nouvelle. Les écoles normales, les IUFM se sont penchés sur ce problème. Faut-il des cours théoriques ? Faut-il des stages de pratique ? Comment articuler ces deux apects ?

■ La reproduction d'un modèle

On trouve encore des partisans d'une formation par imitation dans laquelle l'apprenti professeur apprendrait « l'art d'enseigner » en regardant ses pairs plus expérimentés. « Il s'agit là déjà d'une description réductrice, soutenue par une hypothèse nullement validée. Réductrice, parce qu'elle réduit le métier à ses aspects comportementaux, en en faisant un répertoire de gestes professionnels, qu'il faudrait seulement savoir accomplir. On a alors affaire, au fond, à une approche béhavioriste[80] de l'activité professionnelle. »[81] Dans cette logique, le professeur reproduit par mimétisme une pratique observée. Il peut, tout au plus ajouter quelques touches personnelles. La formation devrait au contraire dégager l'enseignant de « recettes toutes prêtes » et lui permettre de prendre des distances puis d'agir de façon adaptée aux situations qu'il rencontre.

Les stages en tutelle[82] permettent des observations de classes, des échanges avec les maîtres. Ils ne peuvent contribuer à une bonne formation professionnelle que s'ils sont accompagnés d'une analyse des pratiques. La formation en didactique des mathématiques donne des éléments de références théoriques pour conduire cette analyse.

80. Cf les théories de l'apprentissage 1.3, page 24.

81. Y. Chevallard : « Enseignement des mathématiques et besoins professionnels ». *Actes du XVIe colloque inter-IREM des PEN*, Bordeaux, 1989.

82. Il s'agit de stages qui se déroulent sous la responsabilité et en présence du professeur titulaire de la classe.

L'innovation pédagogique

On ne peut pas réduire la formation professionnelle à l'acquisition de méthodes « au goût du jour ». Bien souvent, celles-ci s'inscrivent dans un processus d'innovation pédagogique. Qualifions d'innovation pédagogique toute proposition de méthodes qui ne se légitiment, devant une difficulté, que par leur nouveauté. Plusieurs auteurs (Chevallard, Brousseau) ont étudié la fonction de l'innovation pédagogique comme moyen de faire du neuf sans tirer les leçons du passé, sans chercher à savoir en quoi ce qui précédait était adapté ou non aux objectifs de l'enseignement. Face aux multiples difficultés que pose l'apprentissage, l'innovation pédagogique constitue une réponse simpliste à une attente légitime des élèves, des parents, et des enseignants. « Une innovation, par définition, ne peut pas rester cachée, elle doit être communiquée. Elle doit donc mériter la plus grande diffusion et donc proposer "des choses qui marchent" dans une forme communicable à tous. Donc, sa diffusion doit se justifier par un constat préalable de l'échec des méthodes anciennes – les innovations précédentes –[83]. » L'espérance de vie d'une innovation pourrait se mesurer de la façon suivante : « lorsque plus de vingt pour cent des professeurs partagent un même point de vue, celui-ci devient assez impropre à soutenir une fonction de novateur. Les premiers novateurs, ou d'autres, tournent alors leur regard vers un nouvel horizon – que l'innovation qu'ils abandonnent ait été "bonne" ou "mauvaise" – et ce, d'autant plus vite que sa diffusion a mieux réussi »[84]. De cette façon, l'enseignement qui se fonde sur l'innovation va rejeter des travaux, des résultats, sous prétexte qu'ils datent, et s'emparer de nouveaux travaux parce qu'ils proposeront une nouvelle approche des problèmes rencontrés. « Pour se répandre assez vite, une innovation a besoin du rythme que seuls permettent les processus de mode[85]. »

Une formation professionnelle devrait plutôt permettre d'analyser une démarche, de regarder comment le savoir est traité, d'identifier l'origine des difficultés rencontrées, de s'adapter à une demande de l'institution et de se libérer des effets de mode.

2 La nécessaire professionnalisation

On a coutume de parler de « l'art d'enseigner » ou de « don naturel » d'un enseignant. Faisons un parallèle avec la profession d'architecte. Une réalisation architecturale suppose un projet à la fois artistique (allure générale d'une construction) et technique (étude des sols, résistance des matériaux, etc.). Dans la définition et la réalisation de son projet,

83. 84. 85. G. Brousseau : « Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège », *Petit X*, n° 21, 1989.

l'architecte fait un état des lieux, prend en compte un cahier des charges, identifie des contraintes (matérielles, financières, humaines), etc., avance des solutions techniques tout en conservant sa liberté de création. Pourquoi n'en serait-il pas de même dans le métier de l'enseignant ? Dans un projet éducatif, l'enseignant évalue l'état des connaissances des élèves, s'informe des contraintes données par l'institution, choisit des progressions, élabore des situations pour atteindre des objectifs d'enseignement tout en conservant sa liberté pédagogique.

Le parallèle a ses limites, mais il permet d'imaginer la mise en place d'« une tradition de l'ingénieur »[86] dans la profession de l'enseignant qui prenne en compte les théories de l'apprentissage, qui analyse les projets, qui les réalise, qui tire les conséquences, envisage les améliorations possibles. C'est une des ambitions de la didactique dans la formation professionnelle.

Pour conclure, nous empruntons cette phrase à G. Brousseau : « En définissant et en faisant respecter la part technique du métier de professeur, la didactique rend possible la négociation sociale de son travail. Elle est ainsi le fondement de la professionnalisation de son activité. »[87]

86. On parle alors d'*ingénierie didactique* : La notion d'ingénierie didactique a émergé en didactique des mathématiques au début des années 1980. Il s'agissait alors d'étiqueter un forme du travail didactique comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique, mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science.

87. G. Brousseau : « Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège », *Petit X*, n° 21, 1989.

ETUDE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

3

Tout enseignant souhaite que les connaissances prennent ou conservent du sens pour les élèves, et que les apprentissages ne soient donc pas réduits à des pratiques rituelles.

Dans la première partie, page 27, nous avons donné les définitions de situation, situation didactique, situation a-didactique. Nous proposons ici une étude plus approfondie des situations didactiques.

.1 LES DIFFÉRENTES PHASES DANS UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE

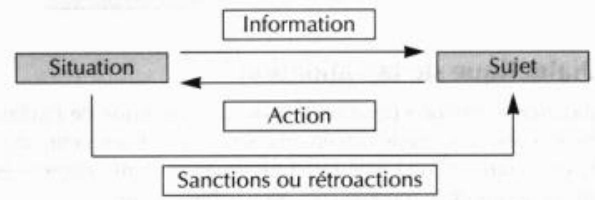
Pour qu'une connaissance prenne du sens chez un enfant, il faut qu'elle lui permette de changer de stratégie dans une situation problématique donnée ou qu'elle remplace une autre connaissance spontanément mise en œuvre mais devenue moins adaptée ou inadéquate dans la situation.

Transposé dans le milieu de l'enseignement il s'agit, pour le professeur de recréer, relativement à un savoir à enseigner, les conditions qui peuvent permettre l'apparition de ce savoir. Il faut donc élaborer une situation où, tout d'abord, l'élève dispose a priori d'une stratégie de base lui permettant d'entrer dans la problématique. Cette stratégie doit évoluer ou être abandonnée au profit d'une autre mieux adaptée aux yeux de l'élève. Pour qu'il puisse juger de l'adaptation ou inadaptation d'une stratégie, la situation doit renvoyer à l'élève des rétroactions. Ce travail de construction et d'organisation de telles situations se heurte à de grandes difficultés.

Dans cette perspective, G. Brousseau a défini quatre grandes catégories de situations (action-formulation-validation-institutionnalisation) au cours desquelles le rapport de l'élève au savoir va changer.

■ Dialectique de l'action

La *dialectique de l'action* consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques :
– la solution est la connaissance visée ;
– l'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;
– la situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître.



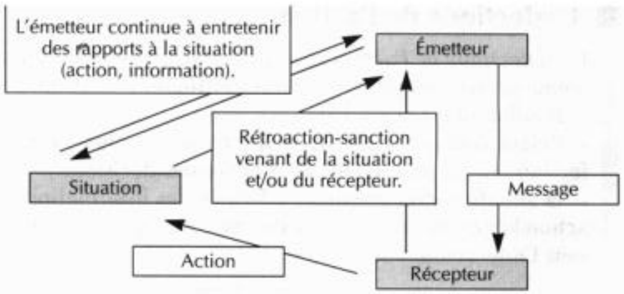
Cette adaptation se fait par essais et erreurs ; les informations renvoyées par la situation sont perçues par l'élève comme des renforcements ou des sanctions de son action. Un véritable dialogue s'instaure entre l'élève et la situation. Cette dialectique permet donc d'activer des modèles implicites d'action, c'est-à-dire non encore formulables par l'élève ni a fortiori organisables en théorie.
Le sujet donne ainsi du sens à la connaissance qu'il fait fonctionner en tant que modèle implicite qu'il a validé empiriquement.
Mais il ne suffit pas alors de l'interroger pour qu'il explicite le modèle ainsi créé, il faut organiser une autre phase.

■ Dialectique de la formulation

Pour que le sujet puisse expliciter lui-même son modèle implicite, et pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va obligatoirement intervenir sous forme d'un langage (écrit ou oral).

La *dialectique de la formulation* consiste à proposer des situations au cours desquelles l'élève échange avec une ou plusieurs personnes des informations rédigées dans un langage qui sera, lui-même, objet d'étude.

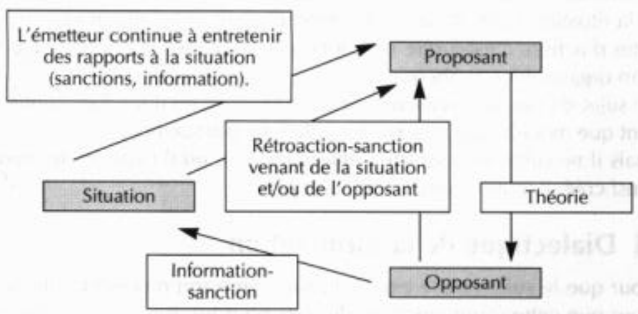
Ainsi, ce type de situations permet d'expliciter des modèles et donc de les formuler à l'aide de signes, de codes et de règles mises au point dialectiquement.
Les situations dites « de communication » entre élèves en sont un exemple.



■ Dialectique de la validation

La validation empirique obtenue lors de la dialectique de l'action est insuffisante pour une réelle activité mathématique. Dans cette nouvelle phase, l'enseignant doit construire une situation dont l'objectif est de démontrer pourquoi le modèle créé est valable ou non.

La *dialectique de la validation* consiste à proposer une situation dont l'enjeu est de convaincre quelqu'un d'autre.



Ainsi l'élève devra construire une démonstration qui ait du sens pour lui. Les situations ainsi crées sont des situations de validation.

Par exemple, construire le résultat suivant au cours préparatoire :

$$12 + 14 = 26$$

peut se faire en unissant deux collections d'objets (une de 12 et une de 14) et en recomptant la nouvelle collection.

On peut également procéder de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & 12 + 14 \\ &= 10 + 2 + 10 + 4 \\ &= 20 + 6 \\ &= 26 \end{aligned}$$

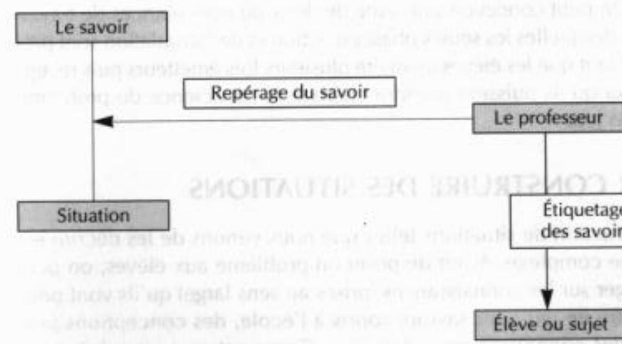
Ici, l'élève fait appel à des règles qui ne sont pas issues des objets eux-mêmes, mais d'un langage qui se met en place. On parlera alors de validation syntaxique.

L'accès au calcul consiste pour une bonne part, à construire une validation syntaxique qui apparaît mieux adaptée à des cas plus généraux (c'est le cas lorsque les nombres deviennent plus grands par exemple). De plus, demander à un lycéen pourquoi 12 + 14 = 26 paraîtrait déplacé ; ce qui veut dire qu'un tel résultat va, à un moment donné, ne plus être remis en cause.

■ L'institutionnalisation

Une situation qui vise l'apprentissage d'une connaissance ne pourra remplir son rôle que si le savoir en jeu est repéré, identifié par l'élève. Certains résultats pourront être rapidement oubliés, d'autres doivent être retenus. L'enseignant a la responsabilité d'organiser cette distinction au cours de phases d'institutionnalisation.

L'*institutionnalisation* est l'acte qui consiste à donner un statut scolaire au savoir produit dans la situation. Il est sous la responsabilité de l'enseignant.



Exercice ***(corrigé page 224)***

Voici trois ébauches de situations :

La première consiste à demander aux élèves de résoudre le problème suivant :

« Dans une boîte de sucre en morceaux, il y a 3 sucres en largeur, 15 en longueur, et 3 en hauteur. Combien y a-t-il de sucres dans la boîte ? »

Dans la deuxième, l'enseignant met à la disposition des élèves une boîte transparente. Ils doivent remplir cette boite avec des petits cubes de bois par rangées régulières et donner le nombre de cubes de la boîte.

Dans la troisième, l'enseignant met à la disposition des élèves une boîte et deux ou trois cubes en bois et demande combien la boîte contiendrait de cubes si elle était pleine.

Quelles sont les connaissances visées ?
Utiliser ces trois exercices pour préciser les différences qu'il peut y avoir entre une situation d'action, une simple manipulation et une activité de contrôle.

Il faut bien être conscient que, dans la pratique, ces phases ne se succèdent pas aussi systématiquement. La plupart des séquences de classes qui prennent en compte cette approche vont se caractériser par la présence d'une ou de plusieurs de ces phases. Ce serait une erreur de croire qu'en une séance de travail, elles devraient être systématiquement présentes. On peut concevoir une suite de deux ou trois séances de travail au cours desquelles les seules phases d'action et de formulation sont présentes. Il faut que les élèves aient été plusieurs fois émetteurs puis récepteurs pour qu'ils puissent prendre clairement conscience du problème qui est en jeu.

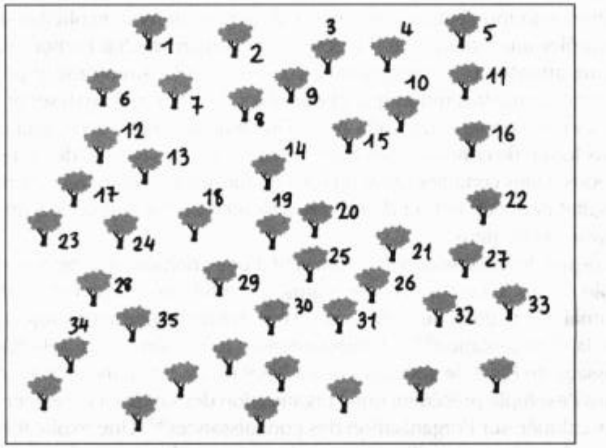
.2 Pour construire des situations

La construction de situations telles que nous venons de les décrire est une tâche complexe. Avant de poser un problème aux élèves, on peut s'interroger sur les connaissances (prises au sens large) qu'ils vont pouvoir mettre en jeu : des savoirs appris à l'école, des conceptions premières, des connaissances « déjà là ». Comment sont organisées ces connaissances ? l'organisation des savoirs à enseigner est-elle identique à celle des connaissances des élèves ? quelles sont les conséquences de la prise en compte des conceptions des élèves dans l'organisation de séquences d'enseignement ?

■ Rapports entre savoirs et connaissances

Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre, pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris.

Prenons un exemple dans le domaine du nombre. Au Cours Préparatoire, au mois de mars, Mathilde doit compter combien il y a d'arbres. Celle-ci commence à écrire un nombre au pied de chaque arbre (cf. figure ci-après) puis, s'arrête à 35 et dit « je ne peux pas mettre le 36 parce que cela peut être là ou là ». (Son geste désigne les deux arbres à droite de l'arbre marqué 35.)



L'enseignant en situation de classe ne peut détecter cette hésitation. Quand bien même il en aurait fortuitement connaissance, il serait complètement démuni pour l'interpréter et a fortiori, agir. La non réussite serait alors traitée comme un accident de comptage et tout au plus « corrigée » par une directive, un conseil. Le problème rencontré par Mathilde ne serait pas traité.

Quel est ce problème ? Ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. Pour contrôler la situation, l'enfant doit explorer de façon exhaustive la collection. Il doit en faire une énumération. Le bon fonctionnement de cette connaissance conditionne complètement le bon déroulement de l'activité numérique proposée par l'enseignant. Les nombres inscrits au pied de chaque arbre ne fonctionnent pas, comme on pourrait le penser comme un marquage au sens ou un marquage permet d'exercer un contrôle de l'exploration. La suite numérique ne vient pas à l'aide du contrôle (de type spatial celui-là). L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé. (repérage en ligne) mais qui devient difficile à poursuivre. Il s'agit donc d'un dysfonctionnement d'une connaissance (l'énumération d'une collection), connaissance nécessaire pour la réussite au comptage.

Ainsi, l'élève a besoin d'une connaissance (l'énumération) que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre, pour apprendre le savoir (le comptage).

Dans « Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant »[88], G. Brousseau et J. Centeno choisissent cette distinction entre connaissance et savoir : « Les *connaissances* sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. (...) Le *savoir* est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoirs et la production de nouveaux savoirs. Dans certaines situations (action formulation ou preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir, ou les deux. »

« Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation[89]. » L'enseignement joue bien sûr un rôle dans le passage de l'état de connaissance à l'état de savoir, mais nous avons vu dans l'exemple précédent que l'organisation des savoirs à enseigner n'est pas calquée sur l'organisation des connaissances[90]. Une explication de ce phénomène est qu'il n'y a pas identité entre la genèse des savoirs et celle des connaissances.

■ Les conceptions des élèves

Reprenons l'analyse commencée page 102 à propos de séquences de géométrie des figures simples. Les messages des enfants montrent à l'évidence une lecture des figures qui ne correspond pas à la lecture qu'en

88. G. Brousseau et J. Centeno : « Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant ». Article *LADIST* Bordeaux (cf. aussi *RDM*, vol. 11/2.3, 1992).

89. F. Conne : « Savoir et connaissance » vol. 12/2.3, *RDM*, pp. 222-267.

90. Pour approfondir ce point, on pourra consulter les travaux de :
P. Orus Bagena : « Le raisonnement des élèves dans la relation didactique » (thèse Bordeaux 1992) ;
M.H. Salin et R. Berthelot : « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire » (thèse Bordeaux, 1992) ;
J. Briand : « L'énumération dans le mesurage des collections » (thèse Bordeaux, 1993).

font les mathématiciens. Pour autant, les mathématiques ne pourraient-elles pas servir à analyser les conceptions des élèves et aider le professeur dans sa tâche ?

Prenons le message suivant : (qui décrit un losange)

> « L1 : Il y a quatre côtés. Le côté AB mesure 7 cm, le côté BC mesure 7 cm, le côté CD mesure 7 cm, le côté DA mesure 7 cm. C'est comme un carré penché. »

Les enfants mesurent ce qui est repérable (les côtés de la figure). L'allusion au carré penché montre le souci d'apporter une information qui distingue cette figure du carré connu des élèves. Mais ceux-ci ne peuvent alors faire le pas de concevoir et mesurer ce que nous appelons une diagonale. Ce serait pourtant une information qui permettrait de caractériser ce losange parmi ceux qui ont des côtés de mesure 7 cm.

Parce qu'il est nécessaire que l'élève prenne conscience que la seule mesure des côtés ne suffit pas à caractériser un losange, l'enseignant a donc tout intérêt à organiser des situations au cours desquelles cette prise de conscience se fera autrement que par un discours explicatif. Le savoir en jeu sera (entre autres) la diagonale en tant qu'outil devenu nécessaire à la construction du losange. Il s'agit donc de construire une organisation d'une suite de séquences fondées sur un autre type d'analyse que la simple analyse en termes de savoirs mathématiques.

L'analyse du losange vue à travers les productions écrites des enfants conduit à faire, dans l'ensemble des quadrilatères, la classification suivante :

Figures pour lesquelles il suffit de mesurer des côtés effectivement dessinés. (carré, rectangle, triangle) pour la faire reproduire.	Figures pour lesquelles il est nécessaire de concevoir un segment non représenté et de le mesurer pour la caractériser : (quadrilatère convexe : enparticulier, parallélogramme, losange, trapèze).

Cette classification utilise bien sûr des notions mathématiques. Mais elle est la conséquence d'une analyse didactique. L'analyse a priori que nous venons de faire montre que le losange pose une difficulté particulière (segment nouveau à concevoir et à mesurer). Ce type d'analyse aura des conséquences importantes sur l'organisation de futures séquences d'enseignement : par exemple, spontanément, il paraîtrait raisonnable de commencer une progression en géométrie qui s'appuierait sur des situations de communication mettant en jeu des figures « simples » telles que le carré ou le rectangle. Mais les enfants ont déjà une connaissance culturelle de ces deux figures. Il sera donc d'autant plus difficile de revenir sur le sens de ces mots dans le champ des mathématiques : par exemple pour les enfants, la propriété « carré » ne contient pas ipso facto la propriété « orthogonalité des côtés ». Finalement, commencer une progression par le carré ou le rectangle n'est peut-être pas une entreprise si simple qu'il y paraît. Le triangle, moins marqué culturellement et pour lequel le seul mesurage des côtés permet la reproduction, peut se révéler un choix plus judicieux.

Le passage du triangle au losange, voire à un quadrilatère quelconque provoquera un saut informationnel (la variable didactique : « nécessité de concevoir un segment non représenté » changeant de valeur) profitable à l'acquisition de savoirs nouveaux. (Par exemple le concept de diagonale.)

Exercice traité

Voici un exercice classique qui peut être proposé à plusieurs niveaux de la scolarité.

Combien y a-t-il de rectangles sur cette figure ?

En étudiant deux exemples de stratégies développées par des élèves et une stratégie experte, on s'aperçoit que celles-ci sont la conséquence de différentes conceptions du rectangle.

Analyse des stratégies

• Première stratégie : L'élève (classe de 6^e) considère une partition de l'ensemble : tous les rectangles ayant une case, puis tous les rectangles ayant deux cases, etc. Il se sert d'une dénomination des rectangles pour constituer une partition de l'ensemble. Cette dénomination utilise la suite numérique. Elle permet l'énumération des classes.

Pour chaque classe, examinons les stratégies :

Pour les « à une case » : la réponse (12) est le dénombrement d'une collection visible.

Pour les « à deux cases » : l'enfant considère les « verticaux » et les « horizontaux ». Pour les « verticaux », il effectue une nouvelle partition à l'aide des colonnes, puis énumère les rectangles à deux cases dans chaque colonne, ce qui, dans ce cas ne présente pas de difficulté bien que cette exploration nécessite la reconnaissance de rectangles qui se chevauchent. Il obtient ainsi 8 rectangles. Il procédera de la même façon, avec les lignes pour les « horizontaux » soit 9 rectangles.

Pour les « à trois cases » : la stratégie est un hybride des deux premiers cas. L'enfant considère les « verticaux » et les « horizontaux ». Les 4 « verticaux » sont visibles, les « horizontaux » se chevauchent (6 rectangles).

Pour les « à quatre cases » : deux sous-classes sont obtenues à partir des rectangles en ligne – 4 cases côte à côte – (3 rectangles) et des rectangles formés de 4 cases élémentaires (6 rectangles).

Les rectangles à 5, 7, 10, 11 cases n'existent pas. Ceci permet d'éliminer les classes vides. Cette découverte se fonde sur une utilisation, dans l'action, de théorèmes d'arithmétique : 5, 7, 11 ne peuvent être de type a x b, ou bien un rectangle à 10 cases n'est pas concevable dans ce contexte.

Pour les « 6 cases » ; trois sous classes lui sont nécessaires : ceux d'« en haut » (2 rectangles), ceux d'« en bas » (2 rectangles), ceux qui sont « debout » (3 rectangles).

Restent les rectangles à 8 cases (2 rectangles), à 9 cases (2 rectangles) et à 12 cases (1 rectangle) dont le dénombrement utilise des stratégies d'énumérations déjà décrites ci-dessus.

Résultat : 60 rectangles au total.

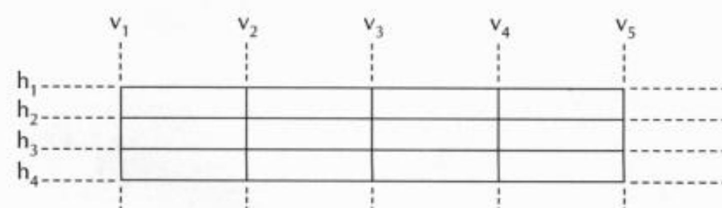
• Deuxième stratégie (élève de terminale C) : (l'unité de mesure est la maille du quadrillage).

Cette fois, le rectangle est conçu à partir de la mesure de chacun de ses côtés. En horizontale, il y a 4 côtés possibles de mesure un, 3 côtés possibles de mesure deux, 2 côtés possibles de mesure trois, un côté possible de mesure quatre, soit : $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ côtés possibles. En procédant de manière analogue, on obtient le nombre de côtés « verticaux » $3 + 2 + 1 = 6$.

Choisir un rectangle revient à choisir un côté horizontal et un côté vertical. On a ainsi $10 \times 6 = 60$ rectangles sur la figure.

• Voici une troisième stratégie (experte) qui utilise le savoir de l'analyse combinatoire et nécessite de concevoir le rectangle comme caractérisé par deux couples de côtés.

Soit $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ l'ensemble des droites verticales supports des côtés verticaux, soit $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ l'ensemble des droites horizontales supports des côtés horizontaux.



Le nombre de rectangles est aussi le nombre de quadruplé d'éléments (v_i, v_j, h_k, h_l) tels que $i \neq j$ et $k \neq l$. C_n^p désignant le nombre de façons de choisir p objets parmi n, il y a C_5^2 façons de choisir le couple (v_i, v_j) et C_4^2 façons de choisir le couple (h_k, h_l). Le nombre de rectangles est $C_5^2 \times C_4^2$, soit 60.

Il apparaît clairement ici que, selon la conception que se fait l'élève de ces rectangles (de l'objet physique de l'élève de 6^e au rectangle « paire côté horizontal, côté vertical » de l'élève de terminale), et selon les outils mathématiques dont il dispose, les stratégies d'exploration de la collection conduites afin d'effectuer le dénombrement, ne sont pas les mêmes.

Cette question de l'existence de choix possibles, et du choix effectif de telle ou telle conception est souvent laissée sous la responsabilité de l'élève. Lorsqu'il s'agit d'utiliser les outils de l'analyse combinatoire, il faudra que l'élève ait une conception en rupture avec la conception habituelle du rectangle. Au mieux, le professeur est conduit à dire « dans cet exercice, considérez le rectangle comme un quadruplé constitué de deux côtés verticaux et de deux côtés horizontaux ».

3^e PARTIE

PRÉPARATION AU CONCOURS DE PROFESSEUR DES ÉCOLES

Dans les deux premières parties de l'ouvrage, nous avons observé des faits d'enseignement, étudié des documents, formulé des questions, trouvé des réponses en nous appuyant sur les premiers concepts de didactique, autant d'éléments qui permettent une réflexion générale sur l'enseignement des mathématiques dans l'optique du concours.**

Cette troisième partie est spécifiquement consacrée à la préparation aux différentes épreuves du concours de professeurs des écoles.

LES TEXTES OFFICIELS DU CONCOURS DE PROFESSEUR DES ÉCOLES

1

Les nouveaux textes relatifs aux épreuves du concours externe de recrutement des professeurs des écoles sont actuellement référencés sous une note de service (arrêté du 18 octobre 1991 modifié par les articles 4 et 5). Cette note de service a été diffusée au dernier trimestre de l'année 1994. Ces textes sont applicables dès le concours de 1995.

> « Cette note vise à préciser et déterminer la conception et le contenu de chacune des différentes épreuves, lesquelles doivent permettre de sélectionner les candidats les plus aptes à acquérir les compétences attendues en fin de formation initiale, compétences qui sont définies dans le référentiel joint en annexe. Cette note de service confirme également que les épreuves des concours ont pour objectif d'apprécier l'aptitude des candidats à mobiliser et à exploiter les connaissances nécessaires à l'enseignement à l'école primaire sans exiger d'eux une connaissance fine et approfondie de tel ou tel sujet dans la discipline considérée. C'est pourquoi le choix a été fait de ne pas arrêter de liste limitative de sujets pour les épreuves disciplinaires de ce concours. Si une connaissance fine et approfondie de notions est requise pour traiter un sujet, ces notions seront fournies au candidat dans le texte de l'épreuve.
>
> ***Épreuve écrite de mathématiques***
>
> L'épreuve écrite de mathématiques permet de mettre en évidence, d'une part, les qualités de raisonnement logique du candidat, son aptitude à utiliser des outils mathématiques, à interpréter des résultats dans les domaines numériques et géométriques et à formuler avec rigueur sa pensée à l'aide de différents modes d'expression et de représentation, d'autre part, sa connaissance des objectifs et des programmes de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, ainsi qu'une bonne appréciation des approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes.
>
> L'épreuve comporte deux volets : dans le premier volet, le candidat analyse des situations ou résout des problèmes ; dans le second, il analyse et critique des documents pédagogiques relatifs à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire (durée de l'épreuve 3 heures ; coefficient 4).

1. Le premier volet doit permettre de juger les compétences du candidat dans la discipline.

S'agissant du niveau scientifique de l'épreuve, on veillera à ne pas perdre de vue qu'elle s'adresse à des candidats qui, titulaires d'une licence ou d'un diplôme au moins équivalent, pourront être, ou non, spécialistes du domaine considéré. L'exercice du métier de professeur des écoles implique la polyvalence, mais il serait illégitime d'exiger des candidats qui se destinent à ce métier les mêmes compétences et connaissances dans tous les domaines. L'épreuve doit cependant leur permettre de mettre en valeur une bonne maîtrise des contenus.

Deux épreuves constitueront ce premier volet :

• Une première notée sur 8 points. Elle doit permettre d'apprécier l'aptitude des candidats à maîtriser et à exploiter des connaissances concernant une ou plusieurs notions relevant de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. On évaluera la rigueur du raisonnement logique, la capacité à utiliser diverses représentations, à maîtriser les relations dans l'espace.

On pourra ainsi demander aux candidats d'expliciter le modèle mathématique sous-jacent à une situation problème, de traiter mathématiquement le problème posé, de mettre en regard des stratégies utilisables par des élèves de l'école primaire.

• Une seconde notée sur 4 points qui consistera à repérer les erreurs et les qualités dans une production d'élève, à les analyser et à les commenter en référence aux objectifs et aux contenus de la discipline tels qu'ils sont définis dans les programmes et instructions de l'école primaire. Elle portera sur un autre thème essentiel : par exemple, si la première épreuve porte sur le domaine numérique, celle-ci pourra porter sur une production de géométrie ou réciproquement.

Le barème envisagé sera joint : l'ensemble de ce premier volet de l'épreuve devra pouvoir être réalisé en une heure et demie, au maximum.

2. Le second volet de l'épreuve a pour objet l'analyse des « approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes » ; il sera mis en relation avec le premier, chaque fois que cela est possible.

Le candidat doit faire la preuve qu'au-delà de la maîtrise des compétences et des connaissances nécessaires pour enseigner à des élèves de l'école primaire dans la discipline ou le domaine considéré, il a réfléchi aux problèmes spécifiques que pose aux enfants l'apprentissage de notions et d'éléments de méthode propres à cette discipline ou à ce domaine.

Dans la mesure où la formation professionnelle initiale n'est pas achevée, il est souhaitable d'éviter à la fois les questions trop ouvertes susceptibles d'entraîner des exposés de caractère très général et les analyses fines de progressions ou de séquences pédagogiques.

Le candidat sera placé en situation de réagir à des documents. Guidé par des questions progressives, il devra être capable de situer le niveau d'enseignement correspondant aux documents proposés par référence aux instructions et programmes officiels et de faire une analyse critique de ces documents.

Plusieurs types de documents peuvent être envisagés : outils pour le maître (extraits de guides ou de manuels, logiciels, documents audiovisuels), travaux d'élèves ou documents présentant des séquences ou des comportements d'enfants.

En fonction des documents proposés, le candidat devra montrer ses capacités à :

– repérer et analyser les contenus scientifiques sous-jacents ;
– déterminer les objectifs visés ;
– apprécier la part de l'activité de l'élève en donnant un avis critique sur la démarche pédagogique proposée ;
– juger de l'intérêt, du moment et des conditions d'utilisation des documents selon leur nature ;
– procéder à une première interprétation des productions d'élèves ;
– imaginer quelques activités à proposer à la suite de la séquence proposée.

On veillera à ne pas alourdir les dossiers remis aux candidats lors de l'épreuve. On tiendra compte du fait que cette seconde partie de l'épreuve doit pouvoir être accomplie en une heure et demie au maximum. »

Tableau récapitulatif

Épreuve de mathématiques au concours de professeur des écoles
Extraits du texte officiel et commentaires

Premier volet (12 points)	Deuxième volet (8 points)
Première épreuve (8 points) : « Elle doit permettre d'apprécier l'aptitude des candidats à maîtriser et à exploiter des connaissances concernant une ou plusieurs notions relevant de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. » *Commentaire :* Cette aptitude à maîtriser des connaissances nécessite des savoirs qui relèvent bien sûr des mathématiques mais qui ne se réduisent pas au seul contenu.	*Épreuve du deuxième volet* (8 points) : « Analyse des "approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes". Il sera mis en relation avec le premier chaque fois que cela est possible. (...) Plusieurs types de documents peuvent être envisagés : outils pour le maître (extraits de guides ou de manuels, logiciels, documents audiovisuels), travaux d'élèves ou documents présentant des séquences et des comportements d'enfants... » *Commentaire :* Le texte fait explicitement le lien (et donc la différence) entre « approche didactique » et « démarche pédagogique ».
Deuxième épreuve (4 points) : « ... Elle consistera à repérer les erreurs et les qualités dans une production d'élève, à les analyser et à les commenter en référence aux objectifs et aux contenus de la discipline. » *Commentaire :* Le repérage d'une erreur est donc suivi d'une analyse au cours de laquelle il est nécessaire de pouvoir établir l'origine probable de l'erreur. Pour conduire une telle analyse, il est important de se fonder sur des travaux de didactique dans le domaine des « obstacles » par exemple qui peuvent apporter des méthodes.	

Ces textes accentuent l'aspect pré-professionnel de l'épreuve de mathématiques. En particulier, on note qu'une grande place doit être faite à l'analyse d'activités d'élèves mettant en relation le contenu scientifique et le déroulement effectif ou attendu d'une séquence.

SAVOIR DÉMONTRER

2

Nous avons vu que dans l'enseignement des mathématiques, on assimile trop souvent démonstration et raisonnement déductif. Ainsi les phases de questionnement qui fondent les enjeux de la démonstration sont bien souvent négligés.

Si nous développons à nouveau la démonstration dans cette partie, c'est parce que notre expérience de correcteurs aux concours de recrutement des professeurs nous montre que l'on retrouve des difficultés comparables chez les élèves du collège et plus tard chez les étudiants. Pourquoi démontrer lorsque cela paraît évident ? À qui s'adresse-t-on lorsque l'on démontre ? Quel est le niveau d'exigence du lecteur ?

Les nouveaux textes relatifs à l'épreuve de mathématiques au concours mettent l'accent, en première épreuve du premier volet, sur l'évaluation « du raisonnement logique ».

Ainsi, les questions ci-dessus s'appliquent autant au candidat relativement à sa propre copie, qu'au futur enseignant relativement à son enseignement des mathématiques...

2.1 La part de l'intuition

L'*intuition* ou « connaissance soudaine, spontanée, indubitable... indépendante de toute démonstration »[91] est une autre forme d'appréhension première d'un problème. Elle peut fonctionner comme un moteur déterminant de l'élaboration ultérieure de la démonstration. Elle peut au contraire s'ériger en obstacle, tout comme une illusion d'optique.

Pour illustrer cette définition, nous proposons un exercice[92] ainsi que des productions écrites d'étudiants de DEUG A et B relatives à cet exercice.

91. Dictionnaire *Littré* de la langue française, Éditions 1971.

92. Cet exercice se trouve dans « Amusements mathématiques », *NORTHROP*, Éd. Dunod. Il a fait l'objet d'un article par J. Briand : « Les transvasements », *Documents pour la formation des professeurs en didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII, 1991.

Exercice (corrigé page 224)

Soient deux récipients contenant en égale quantité l'un un liquide A, l'autre un liquide B.
À l'aide d'une cuillère, on prend une quantité du liquide A que l'on verse dans le liquide B. Du mélange ainsi obtenu dans le deuxième récipient, on prend une cuillère que l'on verse dans le liquide A.
R1. Y a-t-il plus de liquide A dans B que de B dans A ?
R2. Y a-t-il plus de liquide B dans A que de A dans B ?
R3. Y a-t-il autant de B dans A que de A dans B ?
Que peut-on penser de ces réponses ?

Voici quelques exemples d'exposés d'étudiants de DEUG A et B à qui il était demandé de convaincre d'autres étudiants. Certaines de ces rédactions seraient sans doute refusées dans une copie de mathématiques. Sont-elles des démonstrations, sont-elles des démonstrations fausses ?

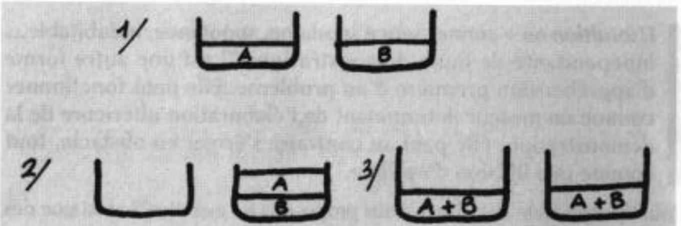
Premier exposé :

Lorsque je ramène du second vers le premier récipient, je rapporte un peu de liquide B, donc il y a plus de B dans A que de A dans B.

Deuxième exposé :

Puisque les niveaux sont les mêmes à la fin des deux actions, ce qui est parti de A est allé dans B, et inversement, donc c'est pareil.

Troisième exposé :



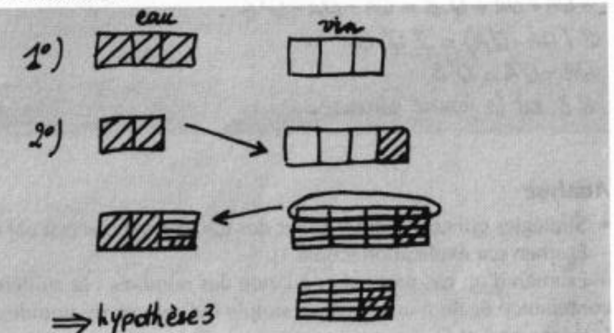
Quatrième exposé :

1) 

2) $\frac{2}{3}A \qquad \frac{3}{3}B + \frac{1}{3}A = 4\left(\frac{1}{12}A + \frac{3}{12}B\right)$

3) $\frac{2}{3}A + \frac{1}{12}A + \frac{3}{12}B \qquad \frac{3}{12}A + \frac{9}{12}B$

Cinquième exposé :



Le liquide A est considéré par l'élève comme étant de l'eau, le liquide B comme étant du vin…

Sixième exposé :

Etat initial : x et y. Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1.
A la suite de la première action, on a $x-\alpha x$ et $y+\alpha x$.
A la suite de la deuxième action, on a $x-\alpha x+\frac{\alpha}{1+\alpha}(y+\alpha x)$ dans le verre de liquide A et : $y+\alpha x-\frac{\alpha}{1+\alpha}(y+\alpha x)$ dans le verre du liquide B, soit $x\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)+y\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ pour le verre A et $x\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+y\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)$ pour le verre B. Donc il y a autant en proportion dans les deux verres.

Septième exposé :

Au départ les deux volumes sont les mêmes : soit VA et VB.
Soit Q le volume de la cuillère. A la suite de la première action, on a :
$VA - QA$ et $VB + QA$.
A la suite de la deuxième action, on a :
$VA - QA + Q'A + Q''B$ et $VB + QA - Q'A - Q''B$. Or ces deux volumes sont les mêmes, donc :
$VA - QA + Q'A + Q''B = VB + QA - QA - Q''B$
$- QA + Q'A + Q''B = QA - Q'A - Q''B$
$2(QA - Q'A) = 2Q''B$
$QA - Q'A = Q''B$
R3 est la bonne réponse.

Analyse

- Stratégies qui consistent à traiter des transformations état par état :
– Examen par explication (copie 1).
– Examen d'un cas particulier à l'aide des nombres : la cuillère a une contenance égale à une fraction simple du volume de liquide (1, 1/2, 1/3) (copies 3 et 5).
– Examen d'un cas particulier à l'aide de schéma : la cuillère a une contenance égale à une fraction simple du volume de liquide (1, 1/2, 1/3) (copie 4).
– Examen à l'aide d'écritures formelles (copie 6).
- Stratégies qui considèrent surtout l'état final : les quantités de liquide sont les mêmes :
– Simple déclaration (copie 2).
– Examen à l'aide d'écritures formelles (copie 7).

Commentaires

Les copies 3, 4, 5 constituent de bonnes analyses qui permettent de mesurer la validité de R3 dans des cas particuliers.
Les copies 6 et 7 constituent une bonne approche de la rédaction « experte » et proposent une démonstration. La conclusion de la copie 6 est « rapide ».
La copie 2 ne sera pas acceptée comme démonstration alors que, du point de vue de l'étudiant, cette explication est indiscutable.
La copie 1 est la formulation de l'intuition première que l'on comprend (que l'on partage peut-être), mais qui est erronée.

Ainsi, devant un problème inhabituel pour lequel une solution intuitive peut apparaître, les étudiants de DEUG A et B ont, pour défendre une stratégie donnée, recours à des approches de la preuve très variées.

De nombreux exercices classiques de mathématiques fondent leur célébrité sur le conflit provoqué par une intuition en regard de la vérité. En voici deux exemples :

Exercice *(corrigé page 224)*

Dans le revue « courrier international » du 5 septembre 1991[93], un article relate un jeu télévisé américain. Voici le jeu :
Il y a deux acteurs : un animateur et le candidat. Derrière eux, trois portes. Derrière chacune de ces portes sont placées au hasard une voiture et deux chèvres. Le candidat ne voit pas ce qui est derrière chaque porte. Il doit essayer de désigner la porte derrière laquelle est l'automobile. Dans ce cas, il gagne la voiture (l'histoire ne dit pas s'il gagne une chèvre dans les autres cas…). Il se place donc devant une porte mais ne l'ouvre pas encore. L'animateur qui connaît la place de la voiture ouvre une des deux autres portes derrière laquelle se trouve une chèvre. Il propose ensuite au candidat de maintenir son premier choix ou de changer de porte.
Le candidat a-t-il intérêt à maintenir son premier choix ou à changer de porte ? ou bien cela n'a-t-il aucune importance ?

Exercice *(corrigé page 225)*

Deux soldats romains possèdent, l'un deux pains, l'autre trois pains. Pour déjeuner, ils décident de mettre en commun leur nourriture et de partager.
Arrive un troisième soldat qui lui ne possède pas de pain. Il accepte de partager le déjeuner avec ses deux compagnons et pour les remercier leur donne cinq écus.
Comment les deux premiers soldats doivent-ils se partager ces cinq écus ?

2.2 Démontrer ou vérifier

L'exigence d'une démonstration en mathématiques a souvent fait perdre de vue que des investigations sur des cas particuliers (exemples numériques ou figures particulières) pouvaient permettre de commencer à « se faire une petite idée » de la validité ou non de telle ou telle hypothèse.

93. H. Huguet : « La voiture et les chères », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Bordeaux, 1993.

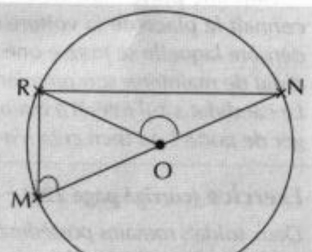
La démonstration est une autre forme de travail du mathématicien qui se situe souvent après ce type de démarche. Indépendamment des difficultés liées à telle ou telle démonstration, les étudiants ne font pas toujours la différence entre une démarche exploratoire qui permet de constituer un début de conviction et l'élaboration d'une démonstration.

L'apprentissage de la démonstration fait partie des difficultés de l'enseignement des mathématiques. En cela, la démonstration n'est pas un sujet d'enseignement, bien qu'elle soit un objectif majeur. Pour des élèves de 5^e ou de 4^e, cette nouvelle exigence du professeur qui demande une démonstration peut être perçue comme liée à la personnalité de l'enseignant.

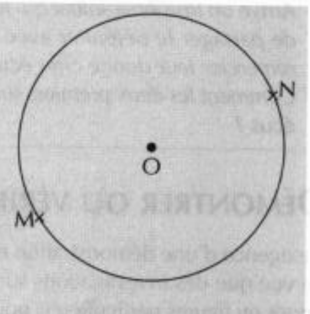
Exercice **(corrigé page 225)**

Voici deux exercices introductifs au théorème suivant : « Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc. »

Exercice 1 : Soit un cercle de centre O et deux point M et N extrémités d'un diamètre.
Soit R un point du cercle non confondu avec M ou N.
Mesurez au rapporteur l'angle $\widehat{RMN}$ et l'angle $\widehat{RON}$?
Que remarquez-vous ?



Exercice 2 : Soit un cercle de centre O et deux point M et N extrémités d'un diamètre.
1. À l'aide d'un rapporteur, construisez un point R du cercle tel que $\widehat{RMN} = 26°$.
Mesurez l'angle $\widehat{RON}$.
Même question avec $\widehat{RMN} = 50°$ puis $\widehat{RMN} = 72°$.
2. Faites une conjecture.
3. Soit x la mesure de l'angle $\widehat{RON}$. Calculez en fonction de x la mesure de l'angle $\widehat{RMN}$. Concluez.



Exercice de mathématiques : Résoudre l'exercice 2.

Exercice de didactique : Ces deux exercices traitent de la même question mathématique. Ils sont pourtant différents. Préciser en quoi.

Voici la solution rédigée par un étudiant à qui cet exercice était proposé :

1°) RMN = 26° RON = 52°
RMN = 50° RON = 100°
RMN = 72° RON = 144°

2°) On constate que RON = 2.RMN. C'est le théorème que l'on veut faire découvrir aux élèves.

3°) RON = x. D'après le théorème précédent, on a RON = 2RMN. Soit x = 2RMN donc RMN = $x/2$. RMN est la moitié de l'angle RON. On trouve le même résultat que précédemment. Ce qui nous permet de généraliser le problème, c'est que l'on peut attribuer à x n'importe quelle valeur. On a démontré le théorème.

Étudier en quoi l'usage du terme « démontré » pour parler de la démonstration est erroné chez l'étudiant.

On constate ici que l'étudiant ne fait pas de différence entre la vérification d'une hypothèse sur trois cas (il considère alors la proposition vraie dans tous les cas) et une démonstration qui, par nature doit prendre en compte l'ensemble des possibles (et donc ne pas se contenter du choix de trois valeurs particulières, même si cela constitue une démarche préalable souvent féconde).

2.3 DÉMONTRER POUR COMPRENDRE, DÉMONTRER POUR CONVAINCRE

« ... Mon affaire avec le prof de maths a pas arrangé ma cote... il nous avait filé une feuille avec des figures géométriques, carré, triangle isocèle, triangle équilatéral, toute la panoplie : il fallait démontrer que le carré était bien un carré et idem pour les autres. J'aime pas me fatiguer les méninges pour prouver des trucs tellement évidents. Alors, j'ai écrit : « c'est un carré, croyez moi sur parole », et j'ai rendu ma copie. Le prof l'a très mal pris... »[94]

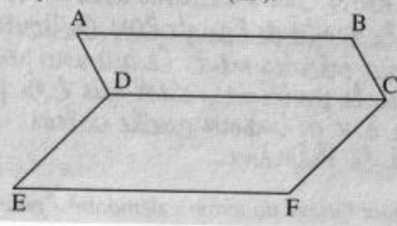
94. « ANIBAL » Anne Bragance, Presse pocket Robert Laffont, 1993.

A-t-on besoin de démontrer des évidences ? Une telle question est souvent posée dans l'enseignement, en particulier en géométrie. Certains résultats « se voient sur la figure », d'autres non. On trouve là une double fonction de la démonstration en mathématiques :

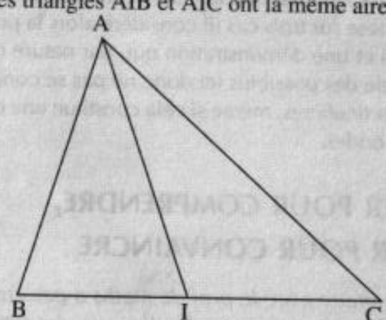
- démontrer pour comprendre : le résultat est visible sur la figure mais la démonstration permet de comprendre pourquoi on a une telle conclusion ;
- démontrer pour convaincre : le résultat n'est pas évident et la démonstration permet d'établir la vérité de la conclusion.

Illustrons ces deux fonctions à l'aide de deux problèmes[95] de classe de troisième :

Exemple 1 : ABCD et CDEF sont deux parallélogrammes. Montrer que la droite (AB) est parallèle à la droite (EF).



Exemple 2 : Soit un triangle ABC quelconque. Il est le milieu de [AB]. Montrer que les triangles AIB et AIC ont la même aire.



Dans le premier cas, il est évident que les droites sont parallèles et la nécessité d'une démonstration n'est pas perçue. La démonstration va servir à comprendre pourquoi ce qui est évident sur la figure est vrai mathématiquement.

95. G. Arsac, G. Chapiron, A. Colonna, G. Germain, Y. Guichard, M. Mante : *Initiation au raisonnement déductif au collège*, PUF, 1992.

Dans le deuxième exemple, il n'est pas évident que les deux aires soient égales. La démonstration aura, à priori, plus de poids, puisqu'elle doit convaincre.

- Dans l'enseignement des mathématiques, la démonstration remplit souvent une autre fonction. Il s'agit de démontrer pour prouver au professeur que l'on sait démontrer, que l'on a compris le problème, que l'on connaît les règles en usage… La démonstration n'a plus à convaincre le professeur de la validité d'un résultat car, de par la place qu'il occupe, il sait si le résultat est correct ou non.

Il serait regrettable que cette dernière fonction de la démonstration mathématique soit la seule perçue par les élèves. Il convient donc de proposer des situations au cours desquelles seront restaurés de vrais débats entre élèves.

Exercice libre

Relever dans un manuel de troisième des exercices de géométrie pour lesquels le résultat demandé se voit sur la figure et d'autres pour lesquels le résultat à établir n'apparaît pas sur la figure.

Exercice ***(corrigé page 226)***

Lors d'un tournoi de belote, chaque équipe de 2 joueurs rencontre toutes les autres équipes. Il y a ainsi 15 parties. Combien y a-t-il de joueurs ?

Résoudre le problème. En donner une démonstration. Quel est le rôle joué ici par la démonstration ?

La correction de cet exercice propose plusieurs démonstrations jouant des rôles différents.

2.4 NIVEAU D'EXIGENCE DANS UNE DÉMONSTRATION

Une démonstration, nous l'avons écrit page 000, utilise un langage mathématique et les règles de ce langage. Au cours de l'écriture, il y a donc une certaine « rigueur » à respecter dans le choix des termes, des notations, de la construction des phrases, des enchaînements… Mais que signifie « être rigoureux » ?

Pour tenter de répondre à cette question, considérons l'exercice suivant :

Exercice traité

Trouvez deux nombres entiers consécutifs dont la somme est 165.

Que doit répondre un élève qui rencontre cet exercice dans une épreuve d'évaluation ?

Imaginons trois copies d'élèves traitant cet exercice simple :

Copie 1	Copie 2	Copie 3
82 et 83 conviennent	82 et 83 conviennent car $82 + 83 = 165$	Appelons n et n + 1 les entiers cherchés, on a : $n + (n + 1) = 165$ $\iff 2n + 1 = 165$ $\iff 2n = 164$ $\iff n = 82$ donc la seule solution est la paire {82,83}

Les trois copies contiennent la réponse à la question posée, mais elles ne seraient pas reçues de la même manière par l'enseignant.

- La première donne une simple affirmation qui répond à la demande prise au pied de la lettre mais elle ne correspond pas au contrat habituel en mathématiques où, non seulement il faut trouver les réponses aux questions posées mais il faut en assurer la validité.
- La deuxième copie contient une justification sous la forme d'une vérification.
- Enfin, la troisième montre comment on peut trouver les nombres. La démonstration apporte la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution. Elle fait appel à des connaissances mathématiques plus élaborées.

Sur une copie d'élève on peut imaginer les appréciations suivantes :
« À justifier »
« Pourquoi ? »
« Évident »
« Comment trouvez-vous ces nombres ? »
« On ne vous demandait pas tout cela… »

D'une manière générale, une réponse accompagnée de nombreuses justifications peut laisser penser que l'élève a des idées confuses. À l'opposé, l'absence de justification ne permet pas de distinguer un élève qui a « copié », d'un élève qui a donné une réponse au hasard, ou d'un élève qui ne sait pas rédiger une argumentation. La preuve s'inscrit dans une démarche de communication. Suivant les attentes du locuteur, elle devra comporter telle ou telle caractéristique. Une des difficultés rencontrées par tout élève ou étudiant est d'identifier le contrat auquel il est lié.
Dans l'exemple de la recherche des deux nombres, la première réponse, donnée par un élève de l'école élémentaire, sera jugée recevable. Par contre cette même réponse sera considérée comme insuffisante pour un élève de collège ou au lycée. Paradoxalement, elle redeviendra acceptable, comme calcul intermédiaire dans un problème de terminale scientifique. Les exigences varient au cours de la scolarité.

Par ailleurs, dans une même classe, un enseignant a des attentes différentes suivant son appréciation du niveau de tel ou tel élève. Par exemple, la simple affirmation du résultat exact par un « bon élève » a toutes les chances d'être acceptée alors que l'on demandera des justifications à un « élève moyen ». Le niveau d'exigence dépend à un niveau de scolarité donné du contrat implicite passé entre l'élève et le professeur.

Exercice *(corrigé page 227)*

Tracer un cercle C et une droite d. Montrer que la figure obtenue admet un axe de symétrie D.

Imaginer deux niveaux de réponses à cet exercice. (Cours Moyen, classe de quatrième.)

MAITRISER LE LANGAGE MATHÉMATIQUE

3

Nous allons maintenant centrer plus particulièrement notre analyse sur l'épreuve écrite de mathématiques du concours de professeurs des écoles.

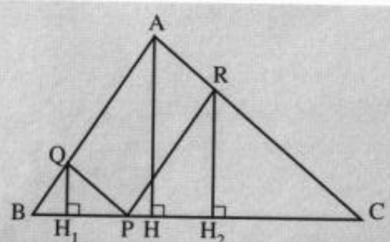
3.1 SAVOIR LIRE UN ÉNONCÉ

À travers des exemples, nous allons réfléchir aux capacités mises en jeu lors de la lecture d'énoncés de problème.

■ Premier exemple

Voici un problème qui a été posé au concours d'entrée des anciennes écoles normales en 1988 à Grenoble. Nous allons faire une étude de cet exercice, non pas en faisant la correction[96], mais en analysant deux difficultés que peuvent rencontrer des étudiants devant ce problème :

Énoncé du problème



ABC est un triangle et P un point du côté [BC]. La parallèle à (AC) passant par P coupe (AB) en Q et la parallèle à (AB) passant par P coupe (AC) en R.

1. Quelle est la nature du quadrilatère ARPQ ?

2. On désigne par H, H_1, H_2 les projections orthogonales respectives des points A, Q et R sur la droite (BC).

96. Cet exercice met en œuvre le théorème de Thalès, les triangles semblables ainsi que du travail algébrique.

Soit a = BC, b = AC, c = AB, h = AH et x = BP.

Exprimer BQ en fonction de a, c et x, puis QH_1 en fonction de a, h et x.

Exprimer RC en fonction de a, b et x, puis RH_2 en fonction de a, h et x.

3. En utilisant les résultats précédents, exprimer en fonction de a, h et x, les aires des triangles BPQ et CPR.

4. Montrer que l'aire A (x) du quadrilatère ARPQ peut s'écrire $A(x) = \frac{h}{a}(a - x)$.

5. Pour cette dernière question, on donne a = 8 et h = 8.

Tracer point par point la courbe représentative de A (x) dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}\,;\vec{j})$. (unité graphique : 1 cm).

À l'aide du graphique, déterminer la valeur entière de x pour laquelle cette aire est maximale.

Pour cette valeur de x, comparer l'aire du quadrilatère ARPQ et l'aire du triangle ABC.

Nous décrivons maintenant des difficultés que nous avons fréquemment repérées auprès d'étudiants préparant le concours. Elles peuvent faire sourire des étudiants et des professeurs mais elles ne sont pourtant ni fortuites, ni marginales.

Première difficulté

la lecture de la phrase : « Exprimer BQ en fonction de a, c et x » déclenche parfois, chez les étudiants, les interrogations suivantes :
- que veut dire « en fonction de » ? ou bien
- il faut BQ en fonction de a, puis BQ en fonction de c, puis BQ en fonction de x.

L'expression « en fonction de » signifie que l'auteur du sujet attend que l'on exprime la mesure du segment [BQ] sous la forme d'une expression algébrique, c'est-à-dire qu'à un moment donné, on puisse quantifier la mesure BQ sous forme d'une expression algébrique. Dans cette expression vont figurer a et c (dans ce problème, ce sont des paramètres) et x (c'est ici la variable). Ainsi, on pourra écrire BQ (x), ce qui signifie, non pas BQ multiplié par x, mais que l'expression BQ est fonction de la variable x.

Quant à la deuxième interrogation, un contrôle du sens du problème montre qu'il est invraisemblable d'exprimer BQ en fonction seulement de a (par exemple).

Deuxième difficulté

Une fois trouvé $\frac{BQ}{c} = \frac{x}{a}$ (théorème de Thalès), certains étudiants ne peuvent exprimer BQ. Ils ne savent pas que l'égalité de deux rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ se définit par l'égalité a d = b c. La définition précédente qui permet de déduire immédiatement BQ. a = c. x apparaît comme un résultat, un théorème à la seule disposition des « matheux ».

Deuxième exemple

Nous proposons d'analyser un texte de problème. Il s'agit d'un problème donné dans l'académie de Grenoble au concours externe de recrutement des professeurs des écoles en 1992.

Énoncé du problème

> En 1991 un magasin de location de cassettes vidéo propose à ses clients trois formules de location :
> formule 1 : 240 F d'abonnement annuel plus 15 F par cassette louée
> formule 2 : 120 F d'abonnement annuel plus 20 F par cassette louée
> formule 3 : pas d'abonnement, mais 30 F par cassette louée
>
> **1.** Quelle est la formule la plus économique pour la location de 10 cassettes ? 20 cassettes ? 30 cassettes ?
>
> **2.** a) Exprimer pour chaque formule le prix à payer en fonction du nombre x de cassettes louées.
> b) Représenter graphiquement sur la feuille de papier millimétré ces 3 formules de location dans un même repère.
> c) Un client ayant choisi la formule 1 a dépensé pour l'année 510 F. Avait-il fait un bon choix ?
> d) Un autre client a dépensé 530 F pour l'année. Pourquoi vient-il se plaindre auprès du commerçant ?
>
> **3.** Quelle est la formule la plus avantageuse à prendre selon le nombre de cassettes louées ?

Analyse du texte

Pour répondre à la première question on effectue le calcul numérique du prix de revient de la location de 10, 20, 30 cassettes avec les 3 formules. On compare ensuite les résultats obtenus.

La deuxième question a) demande le calcul formel (en fonction de x) du prix de location avec les 3 formules (F_1 (x), F_2 (x), F_3 (x)). Le résultat trouvé peut être contrôlé par un retour sur la première question.

L'objet du b) est la représentation graphique dans un même repère des trois formules. On pourra utiliser les résultats établis concernant F_1 (10), F_1 (20), F_1 (30). Même remarque pour F_2 et F_3.
La question c) demande de résoudre F_1 (x) = 510. Elle n'impose pas de méthode. Il est prudent de faire une résolution algébrique suivie d'un contrôle graphique.
Appelons x_0 la solution trouvée, il est alors demandé de calculer F_2 (x_0) et F_3 (x_0).
La question d) est plus difficile à comprendre. Le client a dépensé 530 F avec une formule F_i soit F_i (x) = 530. On demande d'identifier la formule F_i et de trouver x afin de savoir pourquoi le client est mécontent.

La troisième question va obtenir une réponse différente selon le nombre de cassettes louées. Il est vraisemblable que la formule F_3 (sans abonnement) soit la plus avantageuse pour un petit nombre de cassettes louées et que la formule F_1 soit la plus avantageuse à partir d'un certain nombre de locations. Il reste à déterminer les différents seuils. Cela s'obtient facilement par le graphique.

Au cours de ce travail d'analyse de l'énoncé, nous n'avons pas répondu aux questions mais nous avons vu leur enchaînement et les différents outils de contrôle que le candidat peut utiliser. Une telle réflexion peut être utile avant de se lancer dans la résolution effective du problème.

Conclusion : La lecture d'énoncés de problèmes demande de construire du sens. Là interviennent des connaissances mathématiques pour comprendre l'objet des questions mais aussi des connaissances de la langue française pour saisir les nuances, les enchaînements... On voit dans le dernier exemple que des connaissances pragmatiques peuvent être utiles : une location avec abonnement ne devient intéressante qu'à partir d'un certain nombre d'objets loués.

3.2 SAVOIR RÉDIGER UNE ANALYSE DE DOCUMENT

Utiliser un vocabulaire adapté

Les vocabulaires mathématique et didactique permettent d'avoir un discours faisant référence à des savoirs, des concepts connus. Aussi, lorsqu'il s'agit d'étudier un document pédagogique ou d'analyser une séquence de classe, leur utilisation s'avère le plus souvent très profitable pour, à la fois rendre la lecture plus précise et l'analyse plus fine.

Par exemple voici une production d'élève que les étudiants avaient à étudier.

$$10/50 + 40/100 = 50/150$$

Dans son analyse un étudiant écrit :

Pour produire la réponse 50/150, les élèves ont simplement additionné les chiffres du haut entre eux et les chiffres du bas entre eux. (Je ne pense pas qu'ils connaissent encore les nom de « numérateur » et de « dénominateur »).

Cette réponse montre que l'étudiant ne sait pas situer son niveau de discours. Il connaît les mots « dénominateur » et « numérateur » et s'interdit leur usage pour la description du travail ou prétexte que les enfants ne connaîtraient pas ces termes. Pense-t-il mieux décrire les procédures des élèves en utilisant leur vocabulaire ?

Voici une autre production d'élève :

$34{,}5\,(56{,}1 + 12{,}45) - 34{,}5 \times 56{,}1 + 12{,}45$

Dans son analyse un étudiant écrit :

L'élève a multiplié 34,5 par 56,1, mais il a oublié de multiplier le 34,5 une autre fois par 12,45.

Le rappel de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition dans les entiers naturels aurait permis de mieux caractériser l'erreur commise en la rapprochant d'un savoir (distributivité) non acquis. Parler d'oubli reste trop superficiel.

Il n'y a que des avantages à décrire à l'aide d'un vocabulaire adapté, tant du point de vue mathématique que du point de vue didactique, les stratégies des élèves, leurs erreurs, etc.

La pertinence des réponses

D'autre part, des questions précises guident en général le travail demandé. Il faut éviter des commentaires trop généraux ou hors sujet. Voici un exercice posé en formation de professeurs des écoles.

Exercice traité

Un enseignant propose aux élèves l'exercice ci-dessous :

Voici un tableau utilisé par une boulangère pour obtenir le prix de vente de petits pains.

Nombre de petits pains	5	10	15
Prix à payer en francs	15	30	45

Utilise ce tableau pour trouver le prix de vente de 25 petits pains

1. Quelles sont les notions mathématiques sous-jacentes à cette situation ?

2. Quelles procédures peut-on prévoir pour obtenir la solution ?

Nous proposons d'étudier deux copies d'étudiants.

1re copie

1) Les notions mathématiques sous-jacentes à cette situation sont : la lecture de données dans un tableau, la résolution d'une situation problème, la proportionnalité, l'addition, la multiplication.

2) Le maître ou la maîtresse peut soumettre le problème aux élèves individuellement d'abord, puis former des groupes de 4 ou 5 enfants qui confrontent leurs solutions pour mettre en place la meilleure. Puis un rapporteur expose au reste de la classe la solution du groupe. Toutes les solutions sont comparées dans le groupe classe, analysées, critiquées pour retenir les meilleures. La maîtresse interviendra le moins possible sauf pour donner des consignes après chaque passage d'un groupe à l'autre, et pour aiguiller les élèves pour ne pas les laisser sans rien faire. Les petits groupes seront constitués avec des enfants aux solutions différentes.

2^e^ copie

1) Cette activité vise à faire apparaître la notion de proportionnalité ; le prix à payer pour l'achat des petits pains est fonction du nombre de petits pains. Il s'agit donc d'utiliser les propriétés caractéristiques de la fonction linéaire.
Par ailleurs, les nombres utilisés sont petits. Les opérations qui seront faites ne sont donc pas l'objectif essentiel.
2) Procédures prévisibles :
utilisation de la linéarité de la fonction : $x \to ax$
$f(k.x) = k.f(x)$
et $f(x+y) = f(x) + f(y)$
de la façon suivante : 25 petits pains valent 5 fois le prix de 5 petits pains.
donc $15 \times 5 = 75$
25 petits pains :
prix de 10 = 30
prix de 10 = 30
prix de 5 = 15
donc 75 francs au total.
Certains peuvent utiliser le coefficient de proportionnalité (ici 3). Il permet de passer de 5 à 15. Donc à 25 petits pains correspond un prix de $25 \times 3 = 75$F.

• Pour la première question, le premier étudiant met au même plan des notions qui n'apparaissent pas avec la même acuité dans l'exercice. En revanche, le second a hiérarchisé les notions et a tout de suite mis en évidence, en utilisant un langage adapté, l'enjeu de cet exercice.

• Examinons maintenant les réponses à la deuxième question. La première copie montre une confusion entre procédure prévisible en tant que modèle d'action des enfants dans cet exercice et scénario de déroulement de classe. L'étudiant n'a pas répondu à la question posée. Il ne peut abandonner la description naïve de la classe qu'il imagine.
La deuxième copie utilise des savoirs d'étudiant pour conduire une analyse à priori simple et claire. L'étudiant situe son discours à deux niveaux : d'une part le savoir savant (la fonction linéaire et ses propriétés caractéristiques), d'autre part les modèles d'actions de ceux qui utiliseront, en acte, les propriétés décrites.

À la suite de cet exercice, il est proposé aux étudiants de commenter des démarches d'élèves en particulier, on demande d'analyser et de commenter la production écrite de Constance :

5 + 10 + 15 = 25 petits pains
15 F + 30 F + 45 F = 90 F
Le prix de 25 petits pains est de 90 francs.

Mettons en rapport deux autres copies d'étudiants.

1^re^ copie

Constance
5 + 10 + 15 = 25 petits pains
15 F + 30 F + 45 F = 90 F
Elle tient compte de toutes les données, ce qui pourrait être une bonne chose, mais n'utilise en rien la notion de proportionnalité. Elle choisit la sécurité et ne s'aventure pas sur des chemins inconnus : elle n'utilise que la procédure additive et de la façon la plus simpliste possible. Elle n'a pas vu cette notion d'augmentation progressive.

2^e^ copie

Constance utilise la linéarité mais fait une erreur dans le nombre de petits pains. Elle a calculé pour 30 petits pains.
5 + 10 + 15 = 30

• La première copie montre que, pour cet étudiant, les notions de proportionnalité et fonction linéaire ne sont pas liées. De plus les jugements l'emportent sur l'analyse et ce n'est pas ce qui est demandé.
• La deuxième copie analyse ce que Constance a fait et pose une hypothèse très plausible sur la nature de l'erreur. C'est court et cela suffit.

Exercice traité

Au concours dans l'académie de Montpellier en 1992, on demandait de commenter la phrase suivante :

Pour accéder au concept d'aire, les enfants devront avoir des occasions de vérifier que le découpage et le recollage d'une surface en une surface d'une autre forme laissent une grandeur invariante.

Pointer les mots clés de cette phrase et proposer un plan de commentaire.

Éléments de réponse

Les mots clés de cette phrase peuvent être classés en deux catégories :

• ceux qui renvoient à la psychologie cognitive : accéder, concept, occasions, vérifier ;

• ceux qui font partie du langage mathématique : aire, surface, forme, grandeur.

Nous proposons donc un commentaire en deux parties :

• l'une éclaire la notion mathématique en jeu, ici la notion d'aire : l'aire est une grandeur attachée à une surface plane qui correspond à la place « occupée » mais indépendante de la forme de cette surface ;

• l'autre reprend ce que l'on sait de la construction des connaissances par le sujet. L'apprenant va construire ses connaissances à partir d'expériences : découpages et collages, la grandeur aire est l'invariant attaché aux différentes formes obtenues.

■ L'écueil du pédantisme didactique

Une autre tendance consiste à employer les termes de la didactique à contresens ou à seule fin de rénover un discours pédagogique. Par exemple, on trouve l'expression « situation d'action » pour décrire une simple manipulation ou encore « contrat didactique » pour commenter un dialogue entre le professeur et l'élève. Cette tendance au « pédantisme » didactique est assez répandue et nous reviendrons sur ce point en comparant deux copies d'étudiants (cf. page 205).

ANALYSER DES PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

4

À plusieurs reprises, nous avons utilisé des productions d'élèves pour étudier un phénomène de didactique. D'une façon générale, les productions écrites des élèves (prise de notes pendant un cours, essai de stratégies pendant un travail de recherche, contrôle de connaissances, etc.) apportent des informations sur les conceptions en jeu, les erreurs, les savoirs acquis, etc. Nous allons préciser en quoi consiste une analyse de productions d'élèves et traiter plusieurs exemples.

4.1 LE CADRE D'ANALYSE

Selon la nature du document étudié, selon son origine, différentes questions peuvent être abordées. Par exemple, il est possible d'étudier la validité de ce qui est écrit, la pertinence d'une solution, la conduite d'une stratégie, la clarté de la rédaction ou d'un raisonnement, les conceptions, les erreurs… Ce travail peut conduire à des considérations sur le savoir en jeu, les obstacles épistémologiques qui lui sont liés, les connaissances ou stratégies mobilisables par les élèves…
Un travail d'analyse de productions d'élèves doit être replacé dans un contexte d'enseignement (évaluation, aide au travail personnel, etc) ou guidé par des questions.

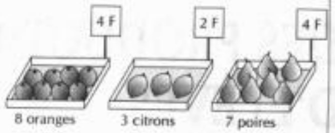
4.2 DES ARGUMENTS POUR EXPLIQUER UNE SOLUTION

Voici des réponses d'élèves[97] face à un problème d'arithmétique. Ce problème est extrait d'un document de l'APMEP (questionnaire d'approfondissement pour l'évaluation en fin de sixième).

97. H. Péault : *Documents pour la formation d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Bordeaux, 1993.

Voici trois plateaux de fruits à l'étalage d'un marchand de primeurs.

L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.



Quel est le fruit le plus cher ?
Quel est le fruit le moins cher ?

FABIEN. Le plus cher des fruits, c'est l'orange. Car si on divise 4 par 8, 2 par 3 et 4 par 7, ça nous donne 2, 1 et 1. Et donc le citron et la poire sont sont les moins chers.

TONY. J'ai fait 4 x 8 = 32 puis 2 x 3 = 6 puis 4 x 7 = 28 et je constate que les fruits les plus chers sont les oranges et les moins chers les citrons.

CINDY. Si on divise les 8 oranges par son prix, on obtient la valeur totale des 8 oranges (8 oranges à 4 F, ça fait 2 F pour une orange).

Si on divise les 3 citrons par son prix, on obtient la valeur totale des 3 citrons (3 citrons à 2 F, ça fait 1,50 F pour un citron).

Si on divise les 7 poires par son prix, on obtient la valeur totale des 7 poires (7 poires à 4 F, ça fait 1,75 F pour une poire).

Donc les plus chers sont les oranges, les moins chers sont les citrons.

MATHIEU. Le fruit le plus cher est le citron car si on multiplie 3 par 2, ça fait 6 : ça sera aussi cher que les oranges et les poires, mais il y aura un fruit de moins.

Le fruit le moins cher est l'orange, parce que 6 citrons ça ferait 4 F et 7 poires ça fait 4 F et 8 oranges ça fait 4 F : c'est le même prix, mais il y a une orange de plus que les autres fruits.

CHRYSTÈLE. Le fruit le plus cher c'est les oranges et les poires car il vaut 4 F : le fruit le moins cher c'est les citrons car il vaut 2 F.

LUDOVIC. 8 : 4 = 2 F pour une orange ; 3 : 2 = 1,50 F pour un citron ; 7 : 4 = 1,75 F pour une poire. Le plus cher l'orange, le moins cher c'est le citron.

ALEXANDRE. En divisant le prix par le nombre de fruits, nous trouvons le prix d'un fruit. Orange : 0,50 F, citron : 0,66 F, poire : 0,57 F. Donc les citrons sont les plus chers et les oranges les moins chères.

JÉRÉMIE. J'ai cherché pour le même nombre d'oranges et de citrons, ça fait 24, 24 oranges coûtent 12 F et 24 citrons coûtent 16 F. Donc les citrons sont plus chers et les poires il n'y en a que 7 pour 4 F donc les oranges sont moins chères.

ALICE. On calcule en faisant une division. 4 : 8 = 0,50 2 : 3 = 0,66 4 : 7 = 0,57. Le fruit le plus cher est le citron à 0,66 F et le moins cher est l'orange à 0,50 F.

KARINE. Si on divise les oranges par 2, ça fait 4 oranges, alors le prix serait à 2 F, 4 oranges à 2 F et 3 citrons à 2 F il y a une orange de plus donc les oranges sont les moins chers et les citrons les plus chers.

SÉBASTIEN. Pour les oranges, j'ai trouvé 12. Pour les citrons, j'ai trouvé 6. Pour les poires, j'ai trouvé 11. Les plus chers c'est les oranges et les poires, les moins chers c'est les citrons.

ÉLODIE. Pour 4 F on peut avoir 8 oranges, 6 citrons et 7 poires. Donc c'est les oranges les plus chers et les citrons les moins chers.

CÉCILE. L'orange coûte 50 centimes car 8 x 50 c = 400 et 400 c'est 4 F...

CYRILLE. Avec 1 F, on a 2 oranges mais moins de 2 avec les citrons et les poires. Donc les oranges sont moins chères.

PEGGY. Les 8 oranges coûtent 4 F et les 7 poires aussi. Alors le plus avantageux ce sont les 8 oranges à 4 F parce qu'il y en a plus et les plus chers c'est les poires mais les citrons encore plus car pour 4 F on n'en a que 6.

JULIEN. L'orange coûte 2 F, le citron 1,50 F et la poire 1,50 F. Donc le plus cher c'est l'orange, et le citron et la poire sont pareils.

p. 131 – APMEP.

On peut déterminer le fruit le plus cher ainsi que le fruit le moins cher en considérant que l'on a :

$$\begin{cases} 8 \text{ oranges pour } 4\text{ F} \\ 3 \text{ citrons pour } 2\text{ F} \\ 7 \text{ poires pour } 4\text{ F} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 8 \text{ oranges pour } 4\text{ F} \\ 6 \text{ citrons pour } 4\text{ F} \\ 7 \text{ poires pour } 4\text{ F} \end{cases}$$

Le fruit le plus cher est le citron, le moins cher est l'orange

Analyse des réponses d'élèves

Nom	Réponse correcte	Analyse de la réponse
FABIEN	Non	• s'exprime facilement • annonce une méthode pertinente qui revient à calculer le prix unitaire (4 divisé par 8…) • effectue un calcul différent (8 divisé par 4…) • s'intéresse au quotient entier ce qui ne permet pas de distinguer le quotient de 3 par 2 du quotient de 7 par 4
TONY	Non	• n'explique pas son raisonnement mais donne les calculs effectués • multiplie 8 par 4, 3 par 2, 7 par 4 • peut avoir interprété les données comme « 8 oranges à 4 F l'une… »
CINDY	Non	• raisonnement confus et expression peu claire • cherche le « nombre » de fruits pour 1 F (en divisant 8 par 4 on obtient que pour 1 F on a 2 oranges…) mais Cindy donne le résultat en F. Est-elle troublée par le résultat 1,50 qui n'est pas entier et qui donc ne peut pas correspondre à une quantité de fruits • parle de valeur totale des fruits sans que l'on perçoive un sens très précis
MATHIEU	Oui	• donne le nombre de fruits de chaque espèce obtenu pour 4 F : méthode tout à fait adaptée dans ce cas particulier de valeurs numériques • exprime clairement son raisonnement en argumentant sa réponse
CHRYSTÈLE	Non	• réponse très brève • compare le prix des lots de fruits • la réponse est cohérente avec le raisonnement mais cela ne correspond pas à la question posée, peut-être cette réponse paraissait-elle évidente
LUDOVIC	Non	• solution à rapprocher de celle donnée par Cindy • très bref • calcule 8 divisé par 4 et conclue 2F pour une orange • ne montre aucune hésitation peut-être pense-t-il réellement trouver des F ?
ALEXANDRE	Oui	• calcule le prix d'un fruit de chaque espèce • raisonnement clair • calculs corrects, résultats donnés en écriture décimale

Nom	Réponse correcte	Analyse de la réponse
JÉRÉMIE	Réponse partielle	• compare séparément les oranges et les citrons en calculant le prix de 24 fruits puis compare les oranges et les poires en remarquant que pour le même prix 4F on n'a pas le même nombre de fruits • s'exprime clairement • le raisonnement ne permet pas de dire lequel des fruits citron ou poire est le plus cher
ALICE	Oui	• calcule correctement le prix d'un fruit de chaque espèce • ne traduit pas son raisonnement mais décrit simplement les opérations effectuées
KARINE	Réponse partielle	• sa justification oublie les poires, les a-t-elle prises en compte dans son raisonnement ? • elle compare le nombre d'oranges et le nombre de citrons obtenus pour 2 F
SÉBASTIEN	Non	• donne le résultat des calculs effectués sans expliquer son raisonnement • a ajouté 8 et 4, puis multiplié 3 et 2 et ensuite a ajouté 7 et 4 • part du principe que des nombres peuvent être ajoutés ou multipliés. Ce réflexe se retrouve souvent chez des élèves qui ne savent pas faire le problème qu'on leur propose
ÉLODIE	Non	• cherche le nombre de fruits obtenus pour 4 F • explique clairement son raisonnement • ne conclut pas correctement. Comme 8 est plus grand que 7 qui est plus grand que 6, elle ordonne les fruits dans le même ordre
CÉCILE	Non	• calcule le prix d'une orange mais s'arrête là • travaille sur des entiers • a peut-être cherché le prix d'un citron ou d'une poire mais a été arrêtée par l'impossibilité d'exprimer les résultats avec des entiers
CYRILLE	Réponse partielle	• trouve que les oranges sont les fruits les moins chers en cherchant le nombre d'oranges pour 1F et en constatant qu'avec 1F on a moins de 2 citrons et moins de 2 poires • ce raisonnement est correct mais il ne donne qu'une réponse partielle
PEGGY	Oui	• cherche en deux étapes le nombre de fruits de chaque espèce pour 4F • s'exprime clairement
JULIEN	Non	• raisonnement incorrect : divise 8 par 4 et annonce que 1 orange coûte 2F

Un tel commentaire s'intéresse à :
- ce que l'élève a répondu : a-t-il trouvé la réponse attendue ?
- au raisonnement qui peut l'avoir conduit à produire sa réponse ;
- à l'aisance avec laquelle il s'exprime ;
- aux erreurs éventuelles qu'il a faites…

4.3 DES DESSINS POUR RECHERCHER UNE RÉPONSE

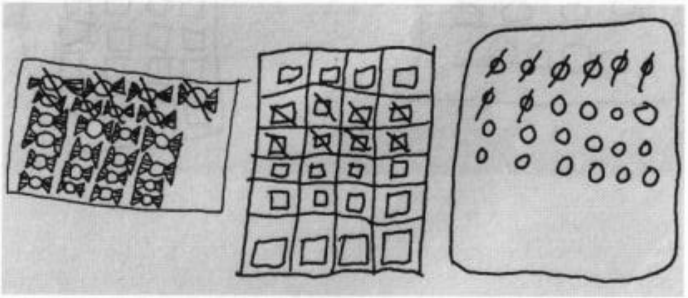
L'exercice suivant est proposé au mois de mars dans un Cours Préparatoire[98] :

> Nicolas a une boîte de chocolats.
> Dans la boîte, il y a 6 rangées de bonbons.
> Dans chaque rangée, il y a 4 bonbons.
> Il donne 8 bonbons à ses amis.
> Combien lui reste-t-il de bonbons ?

Le maître affiche l'énoncé au tableau et chaque élève reçoit une feuille sur laquelle se trouve également l'énoncé. Le maître organise la lecture du texte et précise aux élèves qu'ils peuvent faire un dessin s'ils le souhaitent.

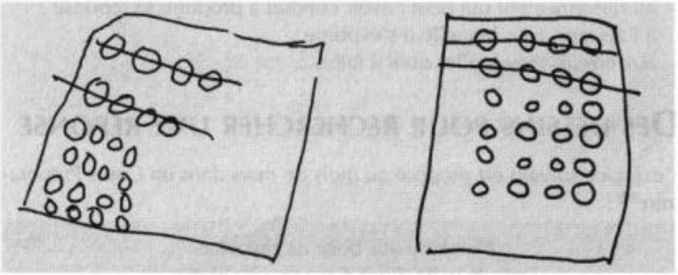
Sur 19 élèves, 14 fournissent la bonne réponse. Nous proposons d'examiner les dessins produits. Ils peuvent être regroupés en plusieurs familles :

• F1 : La boîte est dessinée et les bonbons sont organisés par rangées. Les 8 bonbons sont barrés un à un, en respectant, ou non, les rangées.

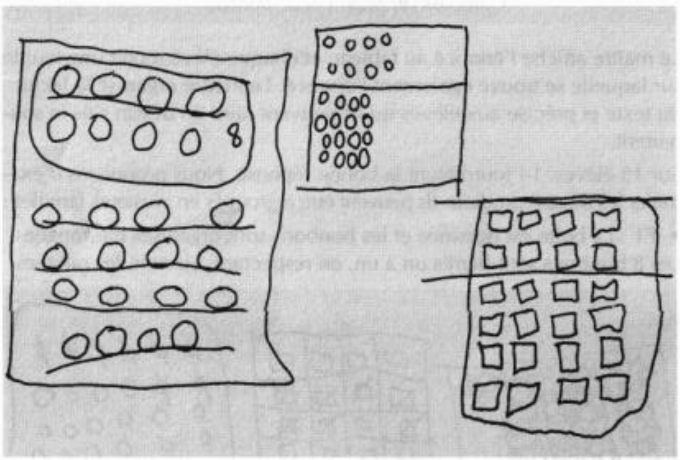


98. M.-C. Chevalier : « Situation d'apprentissage, actions et rétroactions : une expérience en Cours Préparatoire », *Grand N*, n° 51, 1992-1993.

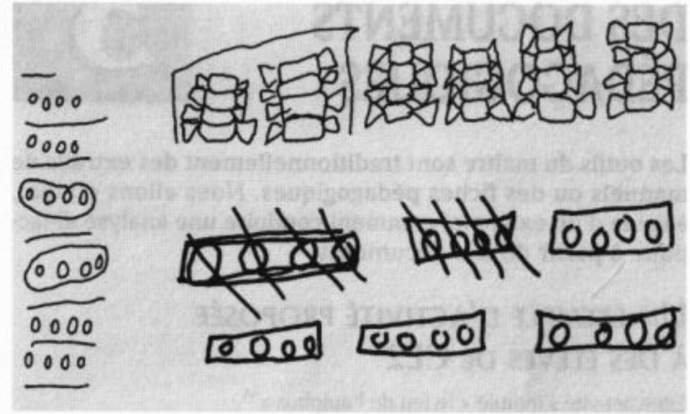
• F2 : La boîte est dessinée et les bonbons sont organisés par rangées. Deux rangées sont barrées l'une après l'autre.



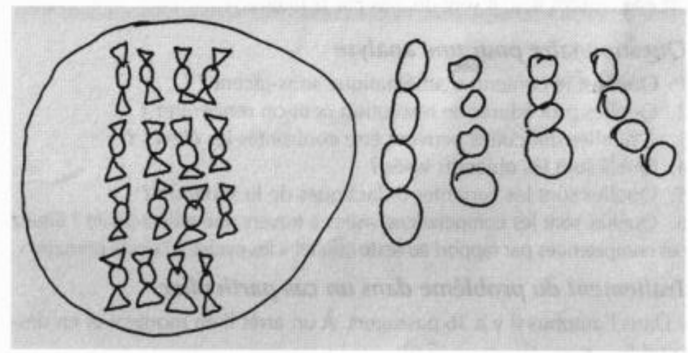
• F3 : La boîte est dessinée et les bonbons sont organisés par rangées. Deux rangées sont globalement isolées.



• F4 : Le contour de la boîte n'est pas dessiné mais on identifie 6 rangées de 4 bonbons.



• F5 : Le contour de la boîte n'est pas dessiné mais on retrouve 4 rangées de 4 bonbons.



À travers ces dessins, on perçoit des démarches différentes. Cet exemple montre que, face à un problème nouveau, les élèves ont différentes façons d'interpréter les données, de construire du sens. Ils peuvent alors engager des procédures de résolution variées. En ajoutant des questions intermédiaires, on ferme le problème et donc on restreint les réponses possibles et on peut gêner des enfants qui n'auraient pas engagé la stratégie induite par les questions.

ANALYSER DES DOCUMENTS PÉDAGOGIQUES

5

Les outils du maître sont traditionnellement des extraits de manuels ou des fiches pédagogiques. Nous allons étudier, à l'aide d'un exemple, comment conduire une analyse didactique à partir de tels documents.

.1 UN EXEMPLE D'ACTIVITÉ PROPOSÉE À DES ÉLÈVES DE CE2

Cette activité s'intitule « le jeu de l'autobus »[99].

Dans un autobus, il y a n voyageurs. À un arrêt il en monte a et en descend b. Combien y a-t-il de voyageurs après le départ de l'autobus ? (Les nombres n, a, b sont donnés par le maître.)

Questionnaire pour une analyse

1. Quel est le contenu mathématique sous-jacent ?
2. Quelles procédures de résolution peut-on rencontrer ?
3. À quelles difficultés peuvent être confrontés les élèves ?
4. Quels sont les objectifs visés ?
5. Quelles sont les variables didactiques de la situation ?
6. Quelles sont les compétences visées à travers une telle activité ? Situez ces compétences par rapport au texte officiel « les cycles à l'école primaire ».

Traitement du problème dans un cas particulier

« Dans l'autobus il y a 36 passagers. À un arrêt il en monte 4 et en descend 5… »

Voici deux démarches différentes pour obtenir la réponse

36 + 4	4 – 5
40 – 5	30 – 1
35	35

Réponse : il y a 35 passagers après le départ de l'autobus.

99. Fiches J.D.I., n° 7 et 8, mars et avril 1988. Cette activité est présentée par D. Butlen et M. Pezard dans *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII, 1991.

Analyse du problème

1. Le *contenu mathématique* correspond aux structures additives (transformation d'états) et à la composition de transformations.

2. Deux *procédures* permettent de donner la réponse.

• La première consiste à rechercher l'état intermédiaire, et appliquer la deuxième transformation.
Ici, lorsque les 4 passagers sont montés, il y a 40 passagers :
36 + 4 = 40
Une fois que 5 passagers sont descendus, on a 35 passagers :
40 – 5 = 35

• La deuxième consiste à déterminer la composée des deux transformations, et de l'appliquer à l'état initial.
Dans le cas de l'exemple, il monte 4 passagers puis 5 descendent, c'est comme s'il en était descendu 1 :
(+ 4) + (– 5) = – 1
36 – 1 = 35 passagers
Il est évident que cette deuxième stratégie est naturelle lorsque la composée des deux transformations est positive, elle beaucoup plus difficile, comme dans l'exemple numérique étudié, lorsque la composée des deux transformations est négative.

3. Les *difficultés* peuvent se situer à différents niveaux :
– mémorisation des données (initiales ou intermédiaires) ;
– représentation de la situation (construction du sens) ;
– choix d'une stratégie de résolution ;
– connaissance des tables d'addition…

4. Les *objectifs* visés, à travers cet exercice, renvoient au travail sur les structures additives et le calcul mental.

5. Les *variables didactiques* de la situation sont essentiellement les données numériques mais pour être plus précis on peut distinguer :
• la taille des nombres ;
• le rapport des nombres entre eux, par exemple, pour :
– (36, 5, 4) les 2 procédures présentent des difficultés de calcul équivalentes ;
– (36, 4, 5) la première procédure est plus accessible que la seconde ;
– (36, 7, 6) la procédure 2 est moins coûteuse en calcul ;
– (36, 4, 9) la procédure 1 est moins coûteuse en calcul.

6. Les *compétences* visées sont celles mentionnées dans la rubrique « calcul réfléchi » (page 55) du document sur *Les cycles à l'école primaire*.

Fiche "Le jeu de l'autobus" J.D.I. (Journal des Instituteurs) n° 8, avril 1988 (*Reproduit avec l'aimable autorisation des éditions Nathan*)

CE2 *Séquence* MATHEMATIQUES

Une activité de calcul mental : le jeu de l'autobus

Le calcul mental et la résolution de problème

Les expériences (1) menées par l'équipe élémentaire de l'IREM de Paris VII ont montré :

– que la prise de distance par rapport à l'algorithme écrit favorise l'émergence de nouvelles procédures de résolution et un affinement des stratégies mises en œuvre par les élèves,

– que le calcul mental est un espace de travail motivant, intensif tant au niveau individuel que collectif,

– que l'approche, par le biais du calcul mental, de certains problèmes (faisant intervenir des données numériques plus ou moins grandes), permet dans certains cas, de donner du sens aux problèmes, de donner du sens aux opérations. Nous le montrerons sur plusieurs exemples (voir fiche CM : le championnat de football) et en particulier ici à propos du jeu de l'autobus.

Présentation de la situation

1) Enoncé standard et objectifs de la situation

Il s'agit de faire résoudre mentalement par les élèves le problème suivant :

« Dans un autobus, il y a n voyageurs, à un arrêt il en monte a et en descend b, combien y a-t-il de voyageurs après le départ de l'autobus ? »

Les nombres n, a et b sont donnés par le maître. Les travaux de G. Vergnaud sur les structures additives montrent, entre autres choses, qu'il y a deux types de procédures pour résoudre ce problème :

– une procédure [E], portant sur des « états », qui revient à considérer un état initial E_1, à lui appliquer une transformation T_1, à en déduire un état intermédiaire E_2, à lui appliquer une transformation T4 afin de déterminer l'état final E_3.

$$E_1 \xrightarrow[+a]{T_1} E_2 \xrightarrow[-b]{T_2} E_3$$

$$n \qquad n + a = n' \qquad n'' = n' - b$$

(1) Le lecteur pourra lire à ce sujet les Cahiers de Didactique des mathématiques « Calcul mental, calcul rapide : une analyse didactique de quelques situations du CP au CM2 » par D. Butlen – C. Lethellieux – M. Pezard.
« Calcul mental de produits et résolution de problèmes multiplicatifs » par D. Butlen et M. Pezard. (IREM Paris VII).

– une procédure [T] portant sur la composition des transformations : elle revient à considérer un état initial E1 à évaluer une transformation T_3 obtenue par composition des transformations T_1 et T_2, à l'appliquer à l'état initial afin de déterminer l'état final E_2.

$$E_1 \xrightarrow[+a]{T_1} \xrightarrow[-b]{T_2} E_2$$

$$(n) \quad \underbrace{T_3}_{a-b} \qquad n' = n + (a - b)$$

Par le biais du calcul mental, le but de l'activité est de faire acquérir aux élèves la procédure [T]. C'est aussi l'occasion de renforcer les pratiques d'addition et de soustraction.

2) Analyse de la tâche de l'élève

L'énoncé est donné oralement, le nombre n est inscrit au tableau (2). Selon les cas, les élèves écrivent seulement le résultat (sur ardoise ou papier) ou bien doivent écrire un résultat intermédiaire (afin d'expliciter leur démarche). Dans ce dernier cas, la tâche de l'élève, notamment le rapport à la mémoire, est changée. Quelque soit la procédure mise en œuvre, l'élève doit :

– mémoriser les données intervenant dans le problème (n, a, b),

– traduire a et b en terme de transformation (ajouter a, retrancher b).

Dans le cas d'une procédure de type [E], l'élève doit effectuer 2 calculs, mémoriser le résultat intermédiaire et donner le résultat final.

Dans le cas d'une procédure de type [T], il doit :

– mémoriser plus longtemps l'état initial a,

– évaluer la valeur absolue [a-b], en déterminer le signe et le traduire en terme de transformation,

– donner le résultat final.

La procédure [T] est plus complexe mais peut s'avérer plus efficace selon les valeurs numériques du problème.

(2) Le maître peut ne pas écrire cette donnée.

3) Les variables didactiques de la situation

a) les variables numériques (données n, a et b)

Afin de favoriser l'émergence et la diffusion de telle ou telle procédure, le maître joue sur les données numériques intervenant dans le problème. L'expérimentation faite dans des classes du CE1 au CM2 montre que l'on peut distinguer deux domaines (3) de variation :

– le domaine D1 : $n < 100$, $a < 10$ et $b < 10$

– le domaine D2 : $n < 100$, $a > 10$, $b >$ et $|a-b| < 10$

Dans les deux cas, le maître choisira une valeur de n nettement supérieure à a et b.

D'autres éléments peuvent intervenir à ce niveau, l'existence par exemple d'un « passage à la dizaine » ; un calcul du type :

$n + a - b = 22 + 9 - 3 = 31 - 3 = 28$

est plus difficile que

$n + a - b = 21 + 8 - 3 = 29 - 3 = 26$

Nous verrons dans le paragraphe III l'effet de ces différents domaines numériques sur les procédures de résolution des élèves.

b) les variables liées au contexte

Cette activité devant se dérouler sur plusieurs séquences, il est nécessaire :

– afin de ne pas lasser les élèves, de changer l'énoncé, ainsi on pourra proposer des jeux faisant intervenir des pertes et des gains (jeu de billes par exemple) ;

– afin de permettre des mimes de la situation (si cela s'avère nécessaire), le maître peut proposer l'énoncé suivant : je suis à n pas de ma grand-mère, elle me dit d'avancer de a pas, puis de reculer de b, où suis-je ? (4) ;

– afin de justifier les valeurs prises par n, a et b, on pourra parler de train au lieu d'autobus. De même, il est indispensable d'inverser les termes « monte » et « descend » dans l'énoncé. Il peut aussi s'avérer nécessaire de prévoir des questions intermédiaires donnant du sens à la tâche :

« Dans un autobus il y a n voyageurs, il en monte a et en descend b, après l'arrêt y a-t-il plus, moins, autant de voyageurs ? »

(3) Exemples : domaine D1 a = 37 ; a = 5, b = 2
domaine D1 a = 59, a = 28, b = 22.

(4) Cet énoncé peut s'adapter pour prévoir les déplacements de la tortue en Logo.

ou bien

« Dans un autobus…, après l'arrêt y a-t-il plus, moins, autant de voyageurs, combien en plus ou combien en moins ? »

Analyse des procédures, résultats et erreurs des élèves

Nous avons testé cette activité du CE1 au CM2, nous avons constaté :

– que les élèves du CE1 ne mettent en œuvre, dans le meilleur des cas, que des procédures de type [E] et que cette activité reste très difficile à ce niveau ;

– que les élèves du CE2 et de CM, dans le cas de données numériques appartenant au domaine D1, utilisent très majoritairement des procédures du type [E]. Seuls quelques élèves (en général les meilleurs) procèdent à l'aide de [T], les données de départ n'imposant pas ce dernier type de procédure, même après explicitation, les élèves ne voient pas la nécessité de modifier leur stratégie ;

– que les mêmes élèves, dans le cas du domaine D2 et après explicitation des différentes méthodes de calcul, adoptent dans la presque totalité des cas une procédure de type [T]. Celle-ci devient alors économique car elle réduit le coût des calculs intermédiaires. Cette diffusion de la procédure [T] nécessite toutefois une explicitation de la part du maître.

Les performances réalisées par les élèves dépendent de la familiarité acquise avec le problème et dépendent de la complexité de la tâche, ainsi nous avons noté que les exercices sont mieux réussis :

– quand il n'y a pas de passage à la dizaine,

– quand l'ordre des transformations est d'abord une addition, puis une soustraction,

– quand a (nombre de voyageurs qui montent) est supérieur à b (nombre de voyageurs qui descendent),

– quand n est assez petit.

Quand les données numériques sont plus importantes (passage au domaine D2), nous constatons un fléchissement des réussites, dû au fait que peu d'élèves composent les transformations, puis au fur et à mesure du déroulement des séances et de la diffusion des procédures [T], un pourcentage de réussite croissant.

Les erreurs les plus fréquentes proviennent principalement :

– d'une difficulté à mémoriser toutes les données,

– d'une difficulté à évaluer le signe de la transformation composée (alors que l'écart |a-b| est correctement évalué),

– cette difficulté est renforcée lorsque le signe de la transformation globale est négatif, ou lorsque le nombre de voyageurs qui descendent est donné en premier.

Signalons pour terminer cette analyse que le rôle du maître dans la diffusion des procédures de composition [T] est fondamental. L'augmentation de la taille des nombres (domaine D2) ne suffit pas à faire évoluer l'ensemble de la classe, une explicitation, une comparaison des savoir-faire sont indispensables. Toutefois, en aucun cas, celles-ci doivent être fournies arbitrairement par le maître, l'explicitation doit s'appuyer sur plusieurs phases de recherche et de familiarisation avec le problème, elle ne peut être justifiée que par un souci d'économie chez les élèves. Cela nous amène à envisager le dispositif ci-dessous.

Déroulement des séquences

1) Un choix pédagogique : la durée des séquences de calcul mental

Le maître a sur ce point un choix à faire, il peut au début de chaque séquence de mathématiques réserver entre 10 et 20 minutes à des activités de calcul mental et donc découper « en tranches » la progression qui sera exposée ci-dessous. Ou bien consacrer un temps plus long au calcul mental (de l'ordre de 3 quarts d'heure), ce qui l'amènera à concentrer le travail des élèves dans le temps.

Quelque soit le dispositif adopté, le maître doit avoir le souci constant de faire expliciter par les élèves leurs démarches de calcul et les faire comparer.

2) Première phase : familiarisation avec le problème : domaine D1

Dans un premier temps, le maître proposera l'activité en choisissant les données numériques dans le domaine D1, $a < 100$, $a < 10$ et $b < 10$. Il pourra proposer, en changeant éventuellement l'énoncé, entre 4 et 8 fois, les 4 calculs suivants :

sans passage à la dizaine	*avec passage à la dizaine* (1 passage)	(2 passages)
32 + 7 – 3	36 + 7 – 2	38 + 7 – 6
35 + 3 – 7	32 + 3 – 8	39 + 2 – 9
39 – 8 + 8	34 – 8 + 2	34 – 8 + 5
34 – 3 + 8	36 – 5 + 9	33 – 5 + 9

Si cela s'avère nécessaire (trop d'échecs), le maître pourra à ce stade poser des problèmes faisant intervenir des questions intermédiaires (combien en plus, en moins…) afin de préciser l'explicitation des procédures de type [T] pouvant apparaître et de faire contrôler les résultats. Toutefois, ce n'est que dans une deuxième phase (domaine D2) que l'on peut espérer une réelle diffusion de ce type de procédures.

Dans tous les cas, il devra faire expliciter les techniques du calcul. Prenons l'exemple 34 – 8 + 5 :

– des élèves peuvent inverser les calculs 34 + 5 = 39 suivi de 39 – 8 = 31 (stratégie supprimant la difficulté due au passage à la dizaine) ;

– d'autres peuvent calculer directement 34 – 8 = 26 et 26 + 5 = 31 ;

– ou bien procéder par décomposition : 34 – 8 = 34 – 4 – 4 = 30 – 4 = 26 suivi de 26 + 5 = 26 + 4 + 1 = 30 + 1 = 31 ;

– d'autres enfin peuvent à ce stade compter et décompter de 1 en 1 (en se servant ou non de leurs doigts) pour déterminer les résultats intermédiaires.

L'explicitation et l'analyse des erreurs sont aussi déterminantes pour faire progresser les élèves.

3) Deuxième phase : domaine D2

A ce stade, le maître pourra proposer plusieurs séries de calculs du type :

45 – 18 + 21 48 – 24 + 22
46 – 23 + 26 49 + 24 – 29

Exemple :

49 + 21 – 29

$$49 \xrightarrow{+21} \xrightarrow{-29} \quad 41$$

$$\xrightarrow{\quad -8 \quad}$$

ou bien

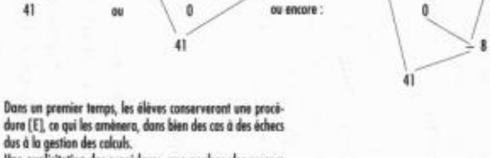
$$49 \xrightarrow{+21} \xrightarrow{-29} \quad 41$$

$$\xrightarrow{+21} \xrightarrow{-21} \xrightarrow{-8}$$

$$\xrightarrow{\quad 0 \quad} \xrightarrow{-8}$$

$$\xrightarrow{\quad -8 \quad}$$

Schémas ligne ou arbres de calcul :



Dans un premier temps, les élèves conserveront une procédure [E], ce qui les amènera, dans bien des cas à des échecs dus à la gestion des calculs.

Une explicitation des procédures, une analyse des erreurs peut permettre une meilleure prise de conscience de l'économie due à la procédure [T]. Si cela s'avère nécessaire, le maître pourra poser des énoncés, avec questions intermédiaires, en s'appuyant sur des exemples du type :

« Quand il monte 23 voyageurs et quand il en descend 23, cela revient au même ! » (argumentation d'un élève).

Il peut aussi faire expliciter par des schémas, les procédures utilisées :

Les explicitations peuvent s'avérer très utiles pour les élèves en difficulté qui, nous l'avons constaté, conservent plus longtemps que leurs pairs, des procédures de type [E].

Denis Butlen
Monique Pezard
P.E.N.
I.R.E.M. Paris VII.

Analyse du document pédagogique

Les éléments d'information contenus dans la fiche sont nombreux et intéressants. Ils correspondent aux résultats d'une recherche et complètent les réponses données ci-dessus. Ils concernent :

• les *résultats de la recherche* : intérêt du calcul mental. Il est dit « le calcul mental est un espace motivant » ; cette affirmation peut paraître excessive ;
• les *structures additives* (en référence aux travaux de G. Vergnaud) ;
• les *procédures de résolution*, expertes ou attendues ;
• les *objectifs* de l'activité en particulier passer de la procédure E à la procédure T (ce point n'apparaît pas à la seule lecture de l'énoncé, par contre il peut devenir évident après avoir réfléchi sur le choix des variables didactiques de la situation par le maître) ;
• les *difficultés* des élèves ;
• les *erreurs* (liées aux difficultés) ;
• les *variables didactiques* de la situation ;
• une *hiérarchisation des procédures* des élèves ;
• le *rôle du maître* dans la gestion de la situation.

En ce qui concerne les variables numériques seule l'expérimentation permet de trouver les deux domaines signalés. Les variables liées au contexte comme la présence de questions intermédiaires jouent sur la difficulté de l'exercice. Par contre l'habillage ne semble pas déterminant. Parler d'un autobus ou d'un train peut-il jouer sur les stratégies mises en œuvre (indépendamment de la taille des nombres) ?
À la lecture de ce qui est dit sur les erreurs, on peut rajouter dans les variables didactiques l'ordre transformation positive/négative et le rapport des nombres entre eux qui ne sont pas signalés.

Autres questions pour compléter l'analyse du document

1. Dans le déroulement des séquences tel qu'il est proposé peut-on apprécier la part de l'activité de l'enfant ?
2. Donner un avis critique sur la démarche pédagogique proposée.
Imaginer des activités à proposer à la suite des séquences présentées.

• La part de l'activité de l'élève dépend de la gestion de l'activité par le maître.
• La démarche pédagogique proposée prévoit : un temps de recherche, l'explicitation des procédures, une analyse des erreurs... Une telle démarche semble cohérente et adaptée aux objectifs...
• Imaginer des activités à proposer à la suite de cette séquence est toujours possible. Elles peuvent être de deux natures différentes :
– en modifiant le contexte afin de faire varier le domaine numérique ;
– en passant à d'autres activités de calcul réfléchi (mettant en jeu d'autres opérations).

CONCEVOIR DES OUTILS

6

Au cours des stages de pratique accompagnée, les futurs enseignants sont amenés à observer puis à préparer, avec l'aide du tuteur, des séquences de mathématiques. Ils devront, pour cela, disposer d'outils adaptés à chacune de ces situations.

6.1 L'observation d'une séquence

Comme nous l'avons vu dans la partie « Réflexion sur l'enseignement des mathématiques », il est très difficile d'observer une séquence de classe pour la simple raison qu'il se passe des tas de choses intéressantes à voir.

Une grille d'observation peut permettre de centrer son regard sur certains points que l'on souhaite étudier et ainsi de relever des informations pertinentes.
Il n'existe pas, à notre connaissance de grille idéale. Si les questions sont trop fermées, des faits dignes d'être notés peuvent échapper complètement à l'observation. Si au contraire les questions sont trop ouvertes, on se retrouve avec une grille « fourre-tout » qui ne permettra pas d'organiser les informations recueillies. Il nous semble souhaitable que chacun, en fonction de son projet de stage, élabore lui-même sa propre grille d'observation.

Les formateurs qui effectuent une visite auprès d'un stagiaire dans une classe, visite qui donnera lieu à un compte rendu, utilisent parfois une grille d'observation qu'elle soit imposée par l'institution à laquelle ils appartiennent ou qu'elle soit choisie par eux. La grille joue à ce moment là un rôle de contrat entre le formateur et le stagiaire : « Voilà ce que je vais regarder, sur quoi portera la discussion lors de l'entretien... »

6.2 La préparation d'une séquence

Les repères qui sont donnés ici servent aussi bien à la préparation d'une séquence de classe ou d'une suite de séquences qu'à définir des axes pour une observation.

Remarque : Cette grille est donnée à titre indicatif et ne prétend pas à l'exhaustivité.

• Classe ou année du cycle
• Nombre et durée des séances
• Place de la leçon dans une rubrique des instructions officielles :
– résolution de problèmes
– approche du nombre ou connaissance des nombres
– calcul
– stucturation de l'espace ou géométrie
– mesure
• Savoir mathématique en jeu
Il s'agit de la notion mathématique, par exemple « la multiplication » ou l'activité mathématique, par exemple « résolution de problème »
• Compétences recherchées
Par exemple « savoir multiplier par 10, 100 » ou savoir trier des informations ».
• Intérêt de la leçon dans un processus d'enseignement
La leçon doit permettre soit :
– l'introduction d'une notion nouvelle
– une familiarisation
– le réinvestissement de notions anciennes
– l'évaluation de connaissances
– des activités de remiédiation
• Matériel à prévoir
Documents utilisés au cours de la leçon par exemple, texte d'énoncé de problème, polycopié, livre...
• Démarche pédagogique
Le déroulement prévu doit :
* Faire apparaître la chronologie des différentes phases de l'activité et pour chacune d'elle :
– l'organisation de la classe (travail individuel, par groupes homogènes...) ;
– les consignes ;
– les interventions finalisées du maître par rapport à la connaissance en jeu (apport d'informations, contrôle de la situation).
* Permettre de repérer éventuellement :
– la dévolution du problème : moyens que l'enseignant se donne pour que les élèves comprennent ce que l'on attend d'eux : par exemple, temps de découverte du matériel, phase de jeu libre avant passation de la consigne.
– l'activité de recherche des élèves : temps dont ils disposent, support sur lequel ils gardent des traces de leur travail...
– la synthèse : forme, moment...
– la validation des productions des élèves : forme, moment, agent.

Qu'est-ce que les élèves ont appris, Comment le repèrent-ils ? Gardent-ils une trace sur un cahier ?...
• Bibliographie
Indiquer éventuellement les références des ouvrages ayant permis d'élaborer la leçon.

Nous proposons en page 196 une grille d'observation ou de préparation pouvant être reproduite et utilisée pour un travail en classe.

- Classe ou année de cycle :
- Nombre et durée des séances :
- Place de la leçon dans une rubrique des instuctions officielles :
- Savoir mathématique en jeu :
- Compétences recherchées :
- Intérêt de la leçon dans un processus d'enseignement :
- Matériel à prévoir :
- Démarche pédagogique :
- Connaissance éventuelle à institutionnaliser :
- Bibliographie :

DES DEVOIRS CORRIGÉS ET COMMENTÉS

7

Dans ce dernier chapitre, nous avons choisi de présenter des sujets de didactique conformes aux textes du concours de professeur des écoles. Nous les corrigeons et commentons des extraits de copies d'étudiants à qui ces sujets ont été proposés.

7.1 LA MULTIPLICATION AU C.E.1

Voici un premier devoir. Il comporte deux documents pédagogiques et une série de questions qui guident l'analyse de ces documents.

■ Premier document :

Écritures multiplicatives au C.E.1[100]

La classe est divisée en équipes de 6, 7 ou 8 élèves. Chaque équipe se scinde en deux groupes : un groupe émetteur et un groupe récepteur.
Chaque groupe émetteur reçoit une feuille polycopiée sur laquelle est dessinée une grille rectangulaire de dimensions a et b (a > 6 et b > 11)
Le groupe récepteur de la même équipe reçoit un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur. Les autres grilles ont soit des dimensions proches de celle du groupe émetteur soit des dimensions différentes mais ayant le même nombre de cases.

Groupe émetteur --- message numérique ---> Groupe récepteur

décrire la grille — reconnaître une grille parmi plusieurs

Par exemple le groupe émetteur reçoit une grille de dimensions 7 et 12.
Le groupe récepteur reçoit 9 grilles de dimensions 7 x 12 ; 6 x 12 ; 7 x 13 ; 8 x 12, 7 x 11 ; 6 x 14 ; 4 x 21 ; 2 x 42 et 3 x 28.

1re phase : travail en équipes
Consigne : Le groupe émetteur doit envoyer un message essentiellement numérique au groupe récepteur lui permettant de retrouver le plus rapidement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible. Le groupe récepteur peut demander des explications supplémentaires. Lorsqu'il a reconnu la grille, il la propose au groupe émetteur pour vérification.

2e phase : comparaison des messages échangés dans les différentes équipes
Chaque équipe décrit les messages échangés et les difficultés rencontrées.

3e phase : introduction officielle de l'écriture multiplicative
Le maître officialise les écritures 7 x 12 et 12 x 7 comme étant pertinentes pour décrire la grille de dimensions 7 et 12.
Le dénombrement des cases de la grille permet de reconnaître le statut de nombre à l'écriture 7 x 12 ou 12 x 7.
12 x 7 est une écriture économique par rapport à :
12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 ou
7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7

100. D'après D. Butlen et M. Pezard : « Analyse de préparation sur les écritures multiplicatives au CE1 ». Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, IREM de Paris VII, 1991.

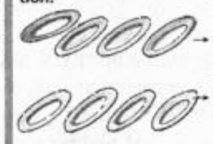
■ Deuxième document :

Math, Livre Outil CE1, collection Magnard école , page 52.

ADDITION ET MULTIPLICATION :

Activités préparatoires

1 Indique le nombre d'assiettes contenues sur ces étagères.
***a)* En effectuant une addition.**
***b)* En effectuant une multiplication.**



• Nombre d'assiettes dans une rangée ______
• Nombre de rangées ______

Le nombre total d'assiettes peut s'écrire sous la forme d'un produit :
Nombre d'assiettes dans une rangée × Nombre de rangées
(. × .)

Addition : . + . = .

Multiplication : . × . = .

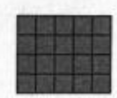
2 Indique le nombre total de verres de cette collection.
***a)* En effectuant une addition.**
***b)* En effectuant une multiplication.**

Nombre de verres dans chaque rangée — Nombre de rangées
(. × .)

a) . + . + . = . .
b) . × . =

Exercices

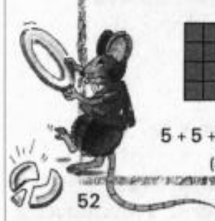
1 Complète pour indiquer le nombre de carreaux.



5 + 5 + 5 + 5 = . .
(5 × .) = . .

2 Même exercice.

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = . .
(10 × .) × . .



52

Questions

Les documents 1 et 2 ont comme objectif l'introduction d'une notion nouvelle : la multiplication ou les écritures multiplicatives.
Lire dans les Programmes et Instructions relatifs à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire les points correspondants.

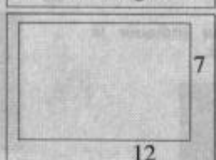
Première partie : *repérage et analyse des contenus scientifiques sous-jacents aux deux documents*

1. Rappeler brièvement les propriétés de la multiplication définie dans l'ensemble N des entiers naturels.
2. Les approches de la multiplication telles qu'elles apparaissent dans les documents 1 et 2 permettront-elles, par la suite, de rendre compte de ces propriétés ? Justifier la réponse.

Deuxième partie : *étude du document 1*

1. Expliquer pourquoi dans une situation de communication, le groupe émetteur et le groupe récepteur doivent former une même équipe.
2. Montrer en quoi une situation de communication est adaptée à la connaissance en jeu : écritures multiplicatives d'un nombre entier.
3. En particulier expliquer le choix des grilles des récepteurs par rapport à la grille 7 x 12 des émetteurs. Expliquer en quoi les dimensions des grilles constituent une variable didactique.
4. Voici quelques messages pouvant être produits par des élèves décrivant la grille 7 x 12. Analysez chacun de ces messages par rapport à la consigne donnée.

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4	84	grille presque carrée
7 lignes et 12 colonnes	12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12	28 + 16 + 12 + 8 + 20
7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7	12 en longueur et 7 en largeur	7 – 12



5. Sous quelles formes se fait la validation de l'activité ?
6. Quel est le rôle de la troisième phase ?

Troisième partie : *repérage des démarches pédagogiques*

Pour chacun des deux documents dire si les élèves se trouvent face à un problème à résoudre pour lequel leurs connaissances anciennes sont insuffisantes ? On pourra se repérer à la définition d'une situation d'apprentissage page 27.

Éléments pour une correction

Nous proposons des éléments de réponse mais ils ne constituent pas une norme. D'autres réponses, dans la mesure où elles sont cohérentes et adaptées aux questions posées peuvent être données.

Première partie : *repérage et analyse des contenus scientifiques sous-jacents*

1. La multiplication est dans $\mathbb{N}$: une loi de composition interne, commutative, associative, qui possède 1 comme élément neutre. Elle est distributive par rapport à l'addition. On pourra rappeler ces propriétés dans le langage mathématique :

Loi de composition interne : la multiplication est une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Commutativité : $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N} : a.b = b.a$

Associativité : $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N} : (a.b).\ c = a.(b.c)$

1 est élément neutre : $\forall a \in \mathbb{N} : a \times 1 = 1 \times a = a$

Distributivité par rapport à l'addition : $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}$: $a.\ (b + c) = (a.b) + (a.c)$ et $(b + c).a = (b.a) + (c.a)$

2. Possibilités offertes par la première approche :
– ici, le produit de deux nombres quelconques a et b, non nuls, est un signe qui définit le nombre d'objets d'une collection structurée en lignes et en colonnes ;
– en modifiant l'orientation de la grille, cette désignation change mais le nombre qu'elle désigne reste le même. La commutativité est alors évidente ;
– l'associativité n'est pas visible en restant en dimension deux ;
– la distributivité est facilement mise en évidence : Le nombre d'éléments d'une collection de a sur b + c est la somme des cardinaux des collections de a sur b et a sur c ;
– enfin, une collection de une ligne sera codée a x 1 ou a.

Possibilités offertes par la deuxième approche : $a \times b = a + a + \ldots + a$ (b termes)
– cette définition fonctionne avec a quelconque mais pour b au moins égal à 2 ;
– $a + a + \ldots + a$ (b termes) n'est pas identique à $b + b + \ldots + b$ (a termes).
– l'associativité n'apparaît pas ;
– la distributivité peut être mise en évidence mais il faudra penser à $a.\ (b + c)$ et aussi à $(b + c).\ a$: $(b + c)$ termes égaux à a, c'est b termes égaux à a puis c termes égaux à a ; a termes égaux à $(b + c)$, c'est a termes égaux à b puis a termes égaux à c ;
– $1 \times a = 1 + 1 +.. 1$ (a termes) $= a$; $a \times 1$ ne peut être défini directement.

Deuxième partie : *étude du document 1* (Concernant le déroulement dans la classe, le document 1 est plus détaillé. Il n'est donc pas étonnant que la majorité des questions soit relative à ce texte.)

1. Si l'émetteur et le récepteur sont concurrents, l'émetteur pourra chercher à augmenter la difficulté du récepteur en écrivant par exemple un message incompréhensible, ou bien le récepteur interprétera de façon incorrecte le message reçu.
Pour que la communication soit la plus intelligible possible, les locuteurs doivent avoir le même enjeu de gain et donc faire partie de la même équipe.

2. L'écriture d'un nombre est une désignation de ce nombre. Le savoir en jeu est donc ici identifiable par la production d'un code, c'est une connaissance qui prend du sens dans une situation de communication qui permet une phase de formulation écrite.

3. Le groupe récepteur reçoit des grilles de dimensions voisines afin qu'une procédure de reconnaissance globale, approximative (presque carrée...) soit inefficace.
Les grilles ayant même nombre d'éléments sont proposées afin d'éliminer les procédures de dénombrement (84 ou 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4) qui permettent d'éviter la connaissance nouvelle.
Les dimensions des grilles sont un élément de la situation, elles sont choisies par l'enseignant et, comme nous venons de le montrer elles affectent la hiérarchie des solutions en rendant inefficaces certaines procédures (reconnaissance de la forme, dénombrement...) ou en augmentant le coût de certaines stratégies.
Par exemple ici 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 n'est pas très coûteux ; si on voulait que les élèves abandonnent une telle procédure qui est sécurisante pour eux, il faudrait augmenter les dimensions de façon brutale (saut informationnel) ou modifier une des contraintes de la situation :
– écrire le message sur une feuille de très petites dimensions ;
– dicter le message à un intermédiaire...
On a là encore d'autres variables didactiques de la situation que le maître peut commander.

4. Tous les messages décrivent la grille 7 x 12 mais ils ne sont pas tous caractéristiques de cette grille :
– trois donnent le nombre de carreaux de la grille : 84 ; 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 ; 28 + 16 + 12 + 8 + 20. On a vu qu'ils ne permettent pas une reconnaissance certaine de la grille par le groupe récepteur ;
– le message « grille presque carrée » n'est pas pertinent étant données les grilles en possession du groupe récepteur ;
– les messages 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 et 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 sont caractéristiques de la grille 7 x 12, ils permettent d'identifier cette grille mais ils devraient être jugés lors de la deuxième phase collective, « moins rapides » que d'autres ;
– les autres messages 7 lignes et 12 colonnes ; 12 en longueur et 7 en largeur ; 7 – 12 ; ainsi que le dessin du rectangle 7 sur 12 sont caractéristiques de la grille, ils permettent sa reconnaissance et font apparaître ses dimensions. Leur comparaison portera sur la signification de l'expression « message essentiellement numérique ». La nécessité d'une convention, d'un code commun pourra être abordée. De tels messages non seulement sont opportuns par rapport à la consigne donnée, mais ils permettent à la situation de se dérouler telle qu'elle a été conçue.

5. Une part de la validation de l'activité est interne à la situation : le message élaboré permet ou ne permet pas l'identification de la grille par superposition (rétroaction). Ce premier temps de validation permet de distinguer les messages caractéristiques de ceux qui ne le sont pas.
Il faut noter que l'on ne peut pas exclure le cas où, avec un message non caractéristique, la grille est reconnue. L'enseignant ne peut pas intervenir à ce moment là sans dévoiler ses intentions. L'équipe aura l'impression d'avoir réussi et ce n'est qu'avec la confrontation avec les autres équipes et les échanges à propos des difficultés rencontrées que le problème pourra être soulevé.

Un deuxième temps de validation est prévu dans la deuxième phase. Ce n'est qu'avec la confrontation des différents messages que certains pourront être rejetés, par le groupe classe, comme n'étant pas tout à fait conformes à la consigne. L'enseignant peut ici ne pas avoir à intervenir. C'est au groupe classe de juger de la pertinence des messages, d'accepter ou de rejeter un message donné.
La validation de l'activité se fait, pour une large part, en situation a-didactique.

6. La troisième phase va permettre de rendre officiel le savoir en jeu, de le reconnaître socialement. C'est la phase d'institutionnalisation. Le maître est le garant du savoir, il apporte les informations nécessaires à la décontextualisation et la dépersonnalisation de la connaissance. Ce temps est essentiel. Il fixe à l'élève ce qu'il devra apprendre, utiliser dans d'autres activités de familiarisation ou de réinvestissement. Il établit un savoir de référence commun à la classe, à l'institution.
Dans le cas présent, le maître institutionnalise un code (a x b) qui n'est que la reprise des codes aperçus dans les messages des groupes.
Selon les pratiques, tel enseignant attendra, lors d'une autre séance, que tous les groupes aient pris conscience de l'opportunité de coder l'information nécessaire par un couple de nombres. C'est d'ailleurs préférable.
Il ne s'agit donc pas, ici, d'institutionnaliser « la multiplication » en tant qu'opération, mais le signe « x » comme moyen de coder un nombre à partir de deux nombres.

Troisième partie : *repérage des démarches pédagogiques* (Il s'agit ici de comprendre que l'auteur du sujet demande une synthèse.)

• Dans la situation 1, les élèves ont un problème de désignation des nombres à résoudre, les connaissances anciennes leur permettent d'entrer dans le problème mais ne réalisent pas les conditions optimales.
Par contre, dans le document 2, les élèves n'ont aucun problème à résoudre. S'il s'agissait de compter les 8 assiettes, le dénombrement serait la procédure de loin la plus efficace. On n'a absolument besoin ni de l'addition, ni de la multiplication ici. L'activité préparatoire est en fait une présentation ostensible du savoir. C'est le maître, par l'intermédiaire du manuel, qui montre la connaissance.

• La situation 1 est d'inspiration constructiviste. L'activité de résolution de problème est utilisée ici pour faire construire à l'élève des connaissances nouvelles. Ces connaissances vont prendre du sens parce qu'elles interviennent comme outils de résolution de problème.

L'activité préparatoire du document 2 est d'inspiration totalement opposée. On reconnaît une démarche pédagogique fondée sur la transmission des connaissances. Le maître explique, du mieux qu'il peut, à l'élève, la connaissance qu'il aura à utiliser. Les nombres en jeu sont très petits, ceci pour éviter toute difficulté aux élèves qui ne peuvent que réussir. C'est une pédagogie qui veut ignorer l'erreur. Le problème de la construction du sens n'est pas posé.

■ Étude de copies d'étudiants

Voici deux extraits de copies concernant la question 1 de la deuxième partie :

Extrait numéro 1

La situation de communication oblige les enfants à élaborer un message. Il ne s'agit pas d'un message qui doit « piéger », mais d'un message qui doit informer. Les émetteurs doivent donc être « complices » avec les récepteurs. L'enjeu est la découverte de la grille.
Le message doit donc permettre :
— de désigner un nombre entier relativement important.
— de rendre compte de la configuration particulière de cet entier : tableau à double entrée.
Ce sont deux caractéristiques de l'écriture multiplicative.

Extrait numéro 2

Une situation de communication permet un véritable dialogue entre l'émetteur et le récepteur et consiste à placer l'élève dans une situation d'action puis de formulation, puis de validation.
Dans la dialectique de l'action, ce qui se conçoit bien ne s'énonce pas forcément bien. C'est-à-dire que l'élève crée un modèle implicite d'action qu'il ne peut obligatoirement formuler.
Dans la dialectique de la formulation, son modèle implicite d'action, pour que cela ait du sens pour lui, il faut qu'il puisse s'en servir et obtenir un résultat, donc l'expliciter clairement.
Il va donc échanger son message.
Dans la dialectique de la validation, son message lui renvoie de l'information qui sera renvoyée par le récepteur et sera le pire de tout, car ce qui est transmis sera accepté ou refusé.

Commentaire

La première copie répond à la question en situant brièvement le rôle d'une situation de communication et en revenant très vite sur le sujet précis : il s'agit d'élaborer une écriture (de type a x b dans le savoir savant), donc de mettre au point une situation de communication propice à cette élaboration.

La deuxième copie montre un cours de didactique mal assimilé (les modèles implicites d'action y sont particulièrement maltraités). L'étudiant parle de situation de communication mais oublie d'évoquer le savoir en jeu : écritures multiplicatives.
Ajoutons à cela qu'une situation de communication n'a pas pour vocation de vouloir recouvrir à tout prix des trois dialectiques mentionnées par cet étudiant.

Pour résumer, nous dirons que les termes de la didactique sont utiles pour éclairer une analyse et pointer des phénomènes. Il ne doivent pas figurer dans une copie pour « l'effet » !

7.2 Une activité de résolution de problèmes au CE2

Voici un sujet proposant la comparaison de deux activités de résolution de problème.

■ Le sujet

Deux activités sont conduites dans deux classes (A et B) de Cours Élémentaire deuxième année de niveau comparable à un même moment de l'année. Les deux classes sont représentatives des classes de C.E.2.

• Dans la classe A, l'enseignant demande de remplir la fiche ci-dessous :

Le 25 juin, des enfants ont acheté 3 paquets de 56 bonbons pour la fête de l'école.
Yves a distribué 12 bonbons, Sophie en a donné 27 et Aurélie en a donné 50.
Mets une croix dans la case qui convient :

1. Combien les enfants ont-ils acheté de bonbons ? 56 + 3 = 59	☐ Ce n'est pas la bonne opération ☐ C'est la bonne opération mais il y a une erreur de calcul ☐ C'est juste
2. Combien de bonbons ont-ils distribués ? 27 + 50 + 12	☐ Ce n'est pas la bonne opération ☐ C'est la bonne opération mais il y a une erreur de calcul ☐ C'est juste
3. Combien reste-t-il de bonbons ? 168 – 89 = 105	☐ Ce n'est pas la bonne opération ☐ C'est la bonne opération mais il y a une erreur de calcul ☐ C'est juste

• Dans la classe B, l'enseignant demande de résoudre ce problème :

Le 25 juin, des enfants ont acheté 3 paquets de 56 bonbons pour la fête de l'école.
Yves a distribué 12 bonbons, Sophie en a donné 27 et Aurélie en a donné 50.
Combien reste-t-il de bonbons ?

Questions

1. Explicitez la tâche de l'élève dans chacune des deux activités.
2. Dans la classe B les productions des élèves se classent en 6 catégories :

R1 :

56 – 12 = 44
44 – 27 = 17
17 + 33 = 50
56 – 33 = 23
donc il reste
23 + 56 bonbons.

R2 :

3 × 56 = 168
168 – 12 = 156
156 – 27 = 129
129 – 50 = 79

R3 :

Il reste 44 bonbons et
29 bonbons et 6 bonbons.

R4 :

Il n'y a pas assez de bonbons
dans un paquet.

R5 :

56 × 3
27 + 50 + 12 = 89
168 – 89 = 79

R6 :
pas de réponse

Interprétez les stratégies développées. Quelles sont celles que vous considérez justes, celles que vous considérez fausses ?
3. Pour quels types d'élèves de la classe B (groupés en R1, R2…), les questions de la fiche (donnée dans la classe A) retracent les étapes de leur raisonnement ? Qu'en déduisez vous concernant l'activité proposée dans la classe A ?
4. Si vous souhaitiez effectuer ces deux activités dans une même classe, dans quel ordre le feriez vous ? Argumentez.
5. La fiche proposée dans la classe A est déclarée « fiche d'évaluation ». D'après vous qu'est-ce que cette fiche évalue ?

Éléments pour une correction

1. La fiche proposée dans la classe A demande à l'élève de contrôler si trois questions ont reçu des réponses exactes (nous reviendrons sur l'identification précise de cette tâche).
Dans la classe B, la tâche de l'élève est de résoudre un problème.

2. La stratégie R1 se comprend lorsqu'on imagine, qu'avec le premier paquet, Yves et Sophie donnent leurs bonbons. Suit alors une addition à trou afin de savoir combien de bonbons il manque à Aurélie pour pouvoir en donner 50. il faut donc ouvrir un second paquet. Il reste 56 – 33 = 23 bonbons. Le troisième paquet reste intact. Cette procédure a le mérite de n'avoir à ouvrir que deux paquets !
La procédure R2 suit chronologiquement les trois distributions. C'est une autre procédure efficace de résolution.
La stratégie R3 ne fait pas, du moins explicitement, le bilan des bonbons restants. la distribution est conçue enfant par enfant, paquet par paquet. Il reste bien alors 44, 29 et 6 bonbons.
Dans la réponse R4 l'élève semble n'avoir considéré qu'un seul paquet. La réponse ne correspond pas à la réponse attendue, elle peut être considérée comme fausse.
La stratégie R5 correspond à la méthode de résolution décrite dans la fiche.
R6 : une absence de réponse ne peut être interprétée.

3. Les stratégies R1, R2, R3, R5 sont adaptées au problème à résoudre en ce sens qu'elles permettent d'obtenir la réponse attendue. Seule la stratégie R5 peut se décomposer en la série de questions réponses de la fiche proposée dans la classe A.

La classe est représentative des classes de C.E.2. à cette époque de l'année. La réalisation de la tâche liée à la fiche suppose que :

– les élèves ayant les conceptions liées à R1, R2, R3 s'adaptent, entrent dans une autre représentation du problème (la stratégie R2 est proche de R5 et donc de la fiche) ;

– Les élèves pour lesquels le problème n'évoque pas une bonne stratégie (R4 et R6) devront analyser des réponses à des questions qu'ils n'associeront pas forcément au problème.

4. La réalisation préalable du problème paraît une démarche raisonnable :

– avantages : l'élève construit une représentation de la situation, la méthode proposée par la fiche permet une organisation des calculs ;

– inconvénients : un élève qui a répondu avec une procédure éloignée de celle décrite dans la fiche peut ne pas reconnaître le problème.

Proposer d'abord la fiche serait ignorer qu'un certain nombre d'élèves conçoivent autrement la résolution du problème (L'étude des stratégies en classe B en apporte la preuve). Cette conception interférera avec le travail d'analyse demandé.

5. Une première réponse serait que la fiche évalue la possibilité de comprendre la stratégie d'un autre relativement au problème et de contrôler l'usage des opérations. Mais on peut s'interroger : un élève qui a su analyser les trois réponses aux trois questions a-t-il compris l'ensemble du problème ? En fait, ce qui est à la charge de l'élève est le contrôle local de l'usage des opérations relativement aux trois questions. Une étude détaillée montrerait que l'on peut répondre à ces trois questions, et donc analyser les trois réponses, sans avoir une compréhension globale du problème.

Un problème guidé par des questions intermédiaires et un problème ouvert ne remplissent pas les mêmes fonctions par rapport aux apprentissages.

Par ailleurs, la lecture de la fiche, comme celle de l'énoncé, renvoie à d'autres compétences : la lecture du tableau demande une mise en correspondance gauche droite mais exclut ici une recherche de cohérence entre les réponses aux trois questions (verticale) ; les verbes « donner » et « distribuer » sont ici synonymes et employés pour éviter une répétition en français. Ce point est-il accessible à des élèves de C.E.2 ? La deuxième question de la fiche reprend le verbe « distribuer ». Que penser d'un élève qui proposerait 12 comme réponse ?

Conclusion :

L'épreuve de mathématiques du concours de recrutement de professeurs des écoles a ceci de particulier : elle demande au candidat d'être tantôt un étudiant qui produit une copie de mathématiques (dans cette partie, il doit résoudre des exercices en sachant situer les niveaux de démonstration attendus), tantôt un futur enseignant qui sait analyser des productions d'élèves, qui commence à étudier des situations d'enseignement. C'est là qu'une formation en didactique des mathématiques permet de mieux situer les questions posées, de les placer dans un cadre théorique et d'y répondre en s'aidant d'outils appropriés.

CORRIGÉS DES EXERCICES

Exercice de la page 20

Solution arithmétique. Il y a plusieurs approches possibles, en voici une : En proportions égales de café A et de café B, le prix de 2 kg est 3,80 + 4,30 soit 8,10 F, soit 4,05 le kg. Il faut mettre un peu plus de café A que de café B. Partant de 500 grammes de café A et de 500 grammes de café B, si l'on ajoute 1 gramme de café A et que l'on enlève 1 gramme de café B, le prix est baissé de 0,0043 F – 0,0038 F = 0,0005 F. Pour que le prix baisse de 0,05 F, il faut répéter l'opération 100 fois, et donc ajouter 100 grammes de café A et retirer 100 grammes de café B : ce qui donne **600 grammes de café A** et **400 grammes de café B**.

Solution algébrique. Soit x la quantité de café A et y la quantité de café B pour avoir un kg de mélange à 4 F, il faut :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3{,}80\,x + 4{,}30\,y = 4 \end{cases}$$

Le système à résoudre est celui de deux équations à deux inconnues :

$$(1)\ 4 = 3{,}80\,x + 4{,}30\,y$$
$$(2)\ x + y = 1$$

(2) équivaut à : $x = 1 - y$

En reportant dans (1) : $4 = 3{,}80\,(1 - y) + 4{,}30\,y$. D'où $0{,}20 = 0{,}5\,y$ ce qui donne $y = 0{,}4$ et $x = 0{,}6$.

Il faut donc 600 grammes de café A et 400 grammes de café B.

Exercice de la page 20

Deux façons de traiter la mise en équation :

la première consiste à prendre pour x l'âge du capitaine. L'âge de Frédéric est 2x. Dans 5 ans : $(x + 5) + (2x + 5) = 70$

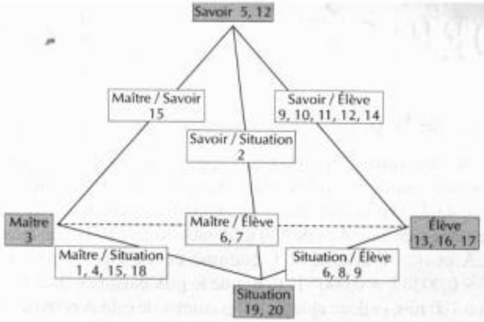
La deuxième consiste à prendre pour x l'âge du capitaine et y l'âge de Frédéric et à résoudre alors le système suivant :

$$\begin{cases} y = 2x \\ (y + 5) + (x + 5) = 70 \end{cases}$$

Exercice de la page 40

Certaines questions se retrouvent en plusieurs points sur le schéma : la question 6 renvoie à l'inter-relation maître/élève : les questions posées entrent dans un dialogue instauré entre le maître et les élèves. Elle renvoie également à l'inter-relation élève/situation car elles assurent la compréhension de la consigne par les élèves.

La question 9 intervient au niveau des deux inter-relations élève/savoir (l'enjeu de savoir existe même s'il n'est pas perçu par les élèves) et élève/situation (trouver les nombres est un enjeu réel mais propre à la situation).



La question 12, si l'on s'intéresse à la conception des décimaux par Élise, est propre à l'inter-relation élève/savoir. Par contre si cette question renvoie à l'histoire des nombres décimaux et aux obstacles épistémologiques qui leur sont liés est une interrogation sur le savoir mathématique.
Dans d'autres circonstances, certaines questions se situeraient en des points différents du schéma : la question 8, dans une situation différente où il existerait des rétroactions, interviendrait au niveau de l'inter-relation élève/savoir.

Exercice de la page 55

• Le premier algorithme (algorithme dit à la grecque ou « per gélosia »[101]) se comprend mieux à l'aide de la présentation ci-dessous :

	1 000	200	50	8	
	100 000	20 000	5	8	100
1	30 000	6 000	1 500	240	30
6	5 000	1 000	250	40	5
	9	8	3	0	

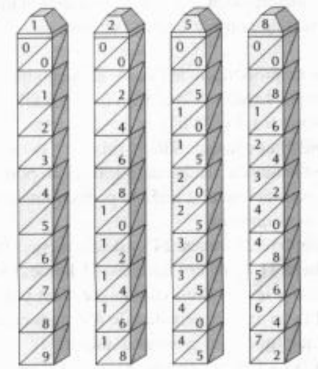
Les calculs en jeux sont :
(1 000 + 200 + 50 + 8).(100 + 30 + 8) = 1 000 x 100 + 200 x 100 + 8 x 100 + 1 000 x 30 + 200 x 30, etc.
Cette possibilité d'écrire le résultat se fonde
– sur l'écriture des nombres en base dix ;
– sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

En tant qu'algorithme, celui-ci permet à l'élève :
– de réaliser une tâche élémentaire (calcul d'un produit lié à une case) et de pouvoir interrompre son travail, puis de continuer ;

101. Du nom des grilles que l'on trouve devant les fenêtres en Andalousie, principalement.

– de visualiser effectivement les erreurs commises (produits partiels non mémorisés) ;
– de prévoir l'ordre de grandeur du résultat.
Il nécessite la connaissance des tables et demande de prévoir le dessin.

Remarque : ce calcul du produit de deux nombres fut à l'origine de la mise en œuvre d'un procédé automatique de calcul des produits appelé « Bâtons de Neper », En 1617, dans son traité « Rabdologia », Neper propose un système ingénieux, outil rêvé pour réduire la multiplication à une série d'additions et la mettre ainsi à la portée de centaines de milliers d'utilisateurs.
Les bâtonnets de Neper sont des sortes de tables de multiplication montées sur des réglettes. Chaque bâtonnet a (1, 2, 5, 8) présente en colonne les produits de a par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, selon la disposition « per gelosia ».



Par exemple, si l'on reprend le calcul du produit, il suffit de placer côte à côte les bâtonnets 1, 2, 5, et 8. La multiplication par 135 procède alors comme suit :
Relever tous les termes sur la deuxième rangée, on obtient 1-2-5-8, effectuer la somme : 1 000 + 200 +50 + 8 = 1 258. De la même façon, sur la quatrième rangée, on relève 3-6-15-24, on calcule : 3 000 + 600 + 150 + 24 = 3 774. Sur la sixième rangée, on relève 5-10-25-40, on calcule :
5 000 + 1 000 + 250 + 40 = 6 290.
Il suffit maintenant d'effectuer l'addition des trois produits partiels en tenant compte de la position des produits ou en recopiant par lecture afin d'obtenir la disposition identique à ce que l'exercice propose.

Les bâtonnets de Neper connurent un très grand succès. Ils étaient fabriqués, selon les moyens des utilisateurs, en ivoire, en os (« Napier bones » chez les anglais) ou en bois. Cette invention rendait inutile la table de multiplication.

• Le deuxième algorithme dit « à la russe » se fonde sur la propriété suivante :
Dans $\mathbb{N}$, si b est pair alors $ab = 2a.\frac{b}{2}$; si b est impair $ab = a(b-1) + a$. Dans ce cas, $b-1$ est pair alors $ab = 2a.\frac{(b-1)}{2} + a$.

Dans l'algorithme à la russe on a donc, par exemple :
1 258 x 135 = 1 258 x 134 + 1 258 (ce 1 258 est consigné à droite). On ne s'occupe alors plus que de 1 258 x 134 = 2 516 x 67 et ainsi de suite.
Du point de vue du mécanisme, il suffit de dire : quand le deuxième est impair on place le premier à droite. Quand le deuxième est pair on ne met rien. Et ainsi de suite. Le résultat s'obtient en faisant l'addition en colonne à droite.
Ce procédé ne nécessite pas la connaissance des tables (sauf la multiplication par deux et la division par deux). Par contre, le procédé est plus long à mettre en œuvre.

Exercice de la page 56

On appelle fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ toute fonction qui à un nombre x fait correspondre ax (a étant un nombre supposé connu).

$$f : x \to ax$$

Prenons un problème de proportion de l'école élémentaire :
Un kilo de tomates coûte 4 francs. Combien coûtent 6 kilos ?
La réponse est évidente : 6 x 4 = 24 le prix est 24 francs.
la fonction qui au poids fait correspondre le prix est f (x) = 4x.
La fonction linéaire est le modèle mathématique de la proportionnalité. Nous allons voir que des propriétés de la fonction linéaire permettent de résoudre simplement des problèmes de proportionnalité :
13 kg de tomates coûtent 42,25 francs. 24 kg de ces mêmes tomates coûtent 81,25 francs : combien coûtent 11 kg de ces tomates, 61 kg de ces tomates ?
L'habitude est de calculer le prix d'un kilo, ici, ce n'est pas nécessaire :
La fonction linéaire f (x) = ax (a le prix du kilo n'est pas connu), possède comme propriété caractéristique (que vous pourrez démontrer) :
$\forall x, \forall y : f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $\forall k\ \forall x : kf(x) = f(kx)$
Donc f (11) = f (24 – 13) = f (24) – f (13) = 81,25 – 42,25 = 39
f (61) = f (2 x 24 + 13) = 2f (24) + f (13) = 162,5 + 42,25 = 204,75 francs

Exercice de la page 57

Ces deux procédés ne se font pas sur le même savoir : le premier procédé utilise le résultat suivant : soit $(a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ a_p\ a_0)$, l'écriture d'un nombre en base dix $(a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ a_p\ a_0)$ c'est aussi $(a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ a_{p-1}\ 10 + a_{p-1}\ a_0)$. L'élève essaie de soustraire 9 à 5, n'y parvenant pas il prévoit de soustraire 9 à 15 (1 7 5 est alors 1 6 15). Il « prend » ainsi une dizaine (le 7 de la colonne du milieu devient alors 6) et marque 6 au lieu de 7. Il effectue « 9 ôté de 15 » et écrit 6.
Dans la deuxième colonne, il y a maintenant 6 en haut. L'élève ne peut soustraire 8 à 6. Il « prend » donc une centaine (le 1 de la colonne de gauche est rayé et le 6 du milieu devient 16) (16 est alors 016). Il déduit 8 de 16 et obtient 8.
Le deuxième procédé est l'application du théorème suivant :
$\forall a\ \forall b\ \forall n : a - b = (a + 10^n) - (b + 10^n)$
Le *1 en italique* est ajouté au nombre du haut et au nombre du bas. Il représente une dizaine.

Le **1 en gras** est ajouté en haut et en bas : il représente une centaine.
Même si ce théorème n'est pas formulé de la façon ci-dessus, il n'empêche qu'il doit être compris pour que ce procédé de soustraction puisse faire sens.

Exercice de la page 60

La fonction ln est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
La fonction f : f (x) = 100 sin x est bornée supérieurement (sinx ≤ 1 donc 100 sinx ≤ 100) donc dès que ln (x) est supérieur à 100, ces deux courbes ne se coupent plus. De plus, l'allure de la fonction f (f (x) = 100sinx) est connue (sinusoïde). L'ensemble des points d'intersection est fini. L'équation admet un nombre entier de solutions.

Exercice de la page 67

Les deux préparations concernent une même leçon : recherche du quotient et du reste dans la division euclidienne d'un nombre par 4 pour résoudre un problème de distribution.

Première démarche	Deuxième démarche
• L'enseignant dicte aux élèves ce qu'ils doivent voir, constater. C'est lui qui demande d'effectuer la division par 4, de repérer le quotient et le reste.	• L'enseignant s'assure de la compréhension de la consigne, puis pose des questions aux élèves qui demanderont, pour être résolues, de mobiliser le savoir en jeu. Ce savoir n'est à aucun moment mentionné.
• L'élève agit sous le contrôle du maître.	• L'élève a la responsabilité des connaissances qu'il mobilise.
	• Les nombres choisis provoquent une rupture dans les stratégies utilisables par les élèves : – remplir le tableau et lire les réponses, – anticiper les réponses.

Exercice de la page 72

Question 1
Différentes solutions pour répondre à la première question :
Les différents triangles sont rectangles. Le quadrilatère EOTU est un carré.
aire (QEU) = 5 x 8/2 = 20
aire (UTA) = 13 x 8/2 = 52
aire (EOTU) = 8 x 8 = 64
total : 136 aire (QOA) = 13 x 21/2 = 136,5
Si les points QUA étaient alignés, le découpage constituerait une partition du triangle QOA et on devrait retrouver au total 136,5 et non 136.
Autre solution : l'idée est de montrer que U ne se trouve pas sur le segment [QA]. Pour cela, on calcule QU, UA, et QA.

D'après le théorème de Pythagore (dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés) on a :

$QU^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

$UA^2 = 8^2 + 13^2 = 64 + 169 = 233$

$QA^2 = 13^2 + 21^2 = 169 + 441 = 610$

Comparons QU + UA et QA ou leurs carrés

$QU + UA = QA$

$\iff (QU + UA)^2 = QA^2$

$\iff QU^2 + UA^2 + 2QU.\ UA = QA^2$

$\iff 89 + 233 + 2\ \sqrt{89\sqrt{233}}\ = 610$

$\iff \sqrt{89\sqrt{233}}\ = 144$

$\iff 89 \times 233 = 144^2$

$\iff 20\,737 = 20\,736$

Cette égalité étant fausse, QU + UA n'est pas égal à QA et par suite les points QUA ne sont pas alignés.

Autre solution :

Si les points sont alignés, alors le théorème de Thalès permet d'affirmer que :

$\frac{QE}{QO} = \frac{QU}{QA} = \frac{EU}{OA}$: or $\frac{QE}{QO} = \frac{5}{13}$. $\frac{EU}{OA} = \frac{8}{13}$: donc l'égalité est fausse, donc les trois points ne sont pas alignés.

Question 2

Ce problème provoque probablement une rupture de contrat parce que les élèves sont habitués à montrer que trois points sont alignés. Le fait même de s'intéresser à trois points non alignés peut paraître comme incongru.

Les élèves vont spontanément faire la conjecture de l'alignement, ce qui va sans doute constituer un obstacle à la résolution du problème, mais à la longue, ce type de ruptures met le sujet dans une véritable attitude de recherche.

Exercice de la page 72

La démarche qui se fonde sur les aires est juste.

Le fait que les résultats ne soient pas éloignés a conduit le candidat à admettre l'alignement. Le fait de n'avoir pas su choisir entre des exigences de nature physique (une mesure, une « tolérance ») et des exigences de nature mathématique conduit à cette conclusion non recevable.

Exercice de la page 73

Si l'enfant avait écrit « s » après la première phrase de Topaze, on peut penser qu'il aurait compris la règle du pluriel. S'il avait écrit le « s » après la deuxième phrase, cela aurait simplement signifié une écoute attentive. Écrit après la troisième phrase le « s » serait le résultat, après rappel à l'ordre, d'une prise de conscience d'une erreur suivie d'une écoute attentive. Dans la dernière phrase, Topaze signale phonétiquement le pluriel du verbe et finit par énoncer la règle en la renforçant phonétiquement.

Exercice de la page 80

Le dictionnaire de français Larousse Référence Électronique donne ces définitions :

chiffre	1. Chacun des caractères qui représentent les nombres. 2. Montant, valeur d'une chose : chiffre d'affaires. 3. Code secret. 4. Combinaison d'une serrure, d'un coffre-fort. 5. Initiales d'un nom enlacées.
droite	1. Côté droit, main droite. 2. Partie d'une assemblée délibérante formée d'éléments conservateurs. 3. (mathématiques) Ligne droite. 4. (locution) À droite, à main droite, du côté droit. 5. Extrême droite, ensemble des mouvements contre-révolutionnaires, qui récusent le libéralisme et le marxisme.
figure	1. Visage. 2. Air, contenance : faire bonne figure. 3. Forme visible d'un corps : avoir figure humaine. 4. Personnalité marquante : les grandes figures de l'histoire. 5. Représentation peinte ou sculptée d'un être humain, d'un animal. 6. Symbole, allégorie. 7. (géométrie) Ensemble de points, lignes, surfaces. 8. Forme donnée à l'expression pour produire un certain effet : figure de rhétorique. 9. Mouvement chorégraphique.
carré	1. Quadrilatère plan à côtés égaux et 4 angles droits. 2. Compartiment de jardin, où l'on cultive une même plante. 3. Sur un navire, salle de repas des officiers. 4. Réunion de quatre cartes semblables. 5. Ensemble des côtelettes du mouton, de l'agneau, du porc. 6. Produit d'un nombre multiplié par lui-même.
produit	1. Richesse, bien économique issus de la production. 2. Objet, article manufacturé. 3. Bénéfice, résultat. 4. (mathématiques) Résultat de la multiplication.
différence	1. Absence de similitude, d'identité. 2. Écart qui sépare deux grandeurs, deux quantités : différence d'altitude. 3. Résultat d'une soustraction.

On voit là le caractère polysémique de la langue française. Parmi les différents sens donnés, on peut repérer l'usage mathématique de chaque terme.

chiffre	1. Chacun des caractères qui représentent les nombres.
droite	3. (mathématiques) Ligne droite.
figure	7. (géométrie) Ensemble de points, lignes, surfaces.
carré	1. Quadrilatère plan à côtés égaux et 4 angles droits. 6. Produit d'un nombre multiplié par lui-même.
produit	4. (mathématiques) Résultat de la multiplication.
différence	2. Écart qui sépare deux grandeurs, deux quantités : différence d'altitude. 3. Résultat d'une soustraction.

Cela ne constitue pas encore des définitions mathématiques.

chiffre	Tout nombre entier (ex : dix) peut être désigné par un codage qui utilise des symboles et des règles d'association de ces symboles. Dans notre système d'écriture (système décimal de position) ce nombre s'écrit avec les chiffres 1 et 0 pris dans cet ordre. X est une autre écriture de ce nombre (écriture romaine). En numération égyptienne il se notait : ∩.
droite	« Une ligne droite » ne correspond pas à la définition actuelle mais dans les éléments d'Euclide, livre I[102] on trouvait « le point est ce dont la partie est nulle, une ligne est une longueur sans largeur, les extrémités d'une ligne sont des points, la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. » Ces références permettent au lecteur de connaître ce dont il s'agit. Actuellement, on donne des définitions ensemblistes : « la droite (AB) est l'ensemble des points M (du plan ou de l'espace) pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$.
figure	On désigne par figure la représentation dans le plan d'un objet géométrique.
carré	On appelle carré un quadrilatère plan qui a 4 côtés de même mesure et 1 angle droit. Le fait que les 4 angles sont droits est une propriété qui découle de la définition. Un carré désigne également le produit d'un nombre multiplié par lui-même.
produit	Résultat de la multiplication.
différence	Écart qui sépare deux grandeurs, deux quantités ou résultat d'une soustraction.

Parmi les définitions ci-dessus, certaines correspondent à une description d'un objet métamathématique (chiffre, figure) d'autres à l'identification d'un objet mathématique dans une théorie (droite, carré…)

Exercice de la page 93

Voici des réponses d'élèves.

Elles coupent les axes.
Les deux droites sont sécantes.
Les deux droites sont sécantes mais ne se coupent pas sur la figure.
Les deux lignes montent.
Les deux droites ont une pente positive.
La droite D1 est au-dessus de la droite D2.
Elles ne sont pas parallèles mais ne se coupent pas.
D1 ne passe pas par l'origine.
Les deux axes sont orthogonaux.
On a oublié les flèches au bout des axes.

102. *Mathématiques au fil des âges*, IREM Groupe Epistémologie et Histoire, Éd. Gauthier-Villars, 198).

On peut noter que certaines sont pertinentes, d'autres révèlent des conceptions erronées.

Exercice de la page 96

Laure et Antoine obtiennent tous deux l'équation cherchée et utilisent des connaissances mathématiques correctes mais leurs copies sont fondamentalement différentes.

Laure n'annonce pas ce qu'elle cherche, elle utilise des abréviations « coef. dir. », des notations incorrectes « (E) » pour désigner une droite passant par E. Tout cela traduit un non respect ou une mauvaise appropriation du langage mathématique. Elle déroule des calculs incompréhensibles pour celui qui ignore la méthode utilisée :

– la droite cherchée a une équation du type $y = ax + b$, a est le coefficient directeur ;
– cette droite étant parallèle à la droite (BC), elle a même coefficient directeur que (BC) ;
– le coefficient directeur de la droite (BC) est donné par la formule :

$$a = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

– b est calculé alors en écrivant que les coordonnées de E vérifient l'équation recherchée.

Ou bien Laure ne sait pas expliquer ce qu'elle fait, ou elle juge inutile de donner des explications à un professeur qui lui par définition comprend.
Enfin, Laure ne donne pas de conclusion, et laisse au correcteur le soin de retrouver le fil des calculs mais aussi la réponse cherchée.
La copie de Laure ne rentre pas dans une démarche de communication mais est intéressante dans un travail privé de recherche.

Antoine donne un titre, rappelle les données, explique sa démarche en faisant part de son raisonnement. Il rappelle également les résultats de cours sur lesquels il s'appuie dans ses calculs. Enfin il donne une conclusion conforme à la question posée.
Sa copie est un modèle sur le plan de la communication.

Les deux copies s'opposent. On a envie de donner une mauvaise note à celle de Laure et une très bonne note à celle d'Antoine. Apprécier un devoir rendu est plus complexe que cela et renvoie au contrat en vigueur dans la classe au moment du devoir. Si les règles de rédaction n'avaient pas été travaillées et négociées avec les élèves, Laure ne peut pas comprendre pourquoi elle a une mauvaise note alors qu'elle a trouvé.

Exercice de la page 101

– Le message T1 n'est pas erroné. Les récepteurs ont vraisemblablement construit le triangle en traçant le premier côté, puis en traçant un deuxième côté, sans penser que la construction effective du deuxième côté ne peut se faire que conjointement avec celle du troisième. La conséquence est que la mesure du troisième côté semble s'imposer aux enfants alors qu'ils devaient la prendre en charge, d'où leur désarroi et leur affirmation : « 11 cm 8 mm ».

– Le message T2 est forcément erroné : un côté a sa mesure qui est supérieure à la somme des mesures des deux autres côtés. Il s'agit donc d'une erreur due aux émetteurs.

– Le message T3 convient. Donc ce sont les récepteurs qui échouent.

Exercice de la page 101

1. Classification des messages :

Permettent de construire une figure unique	Ne permettent pas de construction du tout	Permettent la construction de plusieurs figures
C1 ; C2 ; R1 ; R2 ; L2 ; P2	P3	L1 ; P1

2. Un exemple de message L2 corrigé : « C'est un quadrilatère. Chaque côté mesure 7 cm. Une diagonale mesure 9 cm. »

3. Les messages C1 et C2 montrent que le signifiant « carré » ne contient peut être pas les propriétés « côtés égaux » et « angles droits » puisque les élèves les rappellent.

Le message P1 signifie qu'un rectangle peut être penché. On comprend bien ce que veut dire cet enfant. Il est tout aussi vrai que cette conception du rectangle n'est pas celle des mathématiques.

Remarque : Le message P2 n'est pas correct si l'on s'en tient à une analyse mathématique classique. Nous l'avons classé dans la première catégorie parce qu'il a permis la construction de la figure au cours d'une séquence effective par le groupe récepteur. On peut faire l'hypothèse que les enfants partagent les mêmes références implicites.

La démarche suivie par le groupe qui réalise le message P3 est correcte : mesurer les côtés et une diagonale. Mais la mesure de la diagonale est fausse : la distance de A à C est obligatoirement plus courte que la somme des mesures AB et BC.

Exercice de la page 105

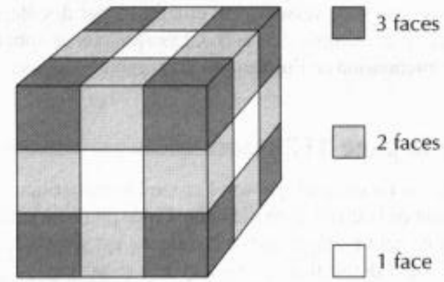
« Trouver les chiffres »

	Les chiffres peuvent être :
	• 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
• 123 n'a aucun chiffre commun	• 0, □, □, □, 4, 5, 6, 7, 8, 9
• 456 a un chiffre commun à la bonne place	• il s'agit du chiffre 6 et il se trouve en 3[e] position de plus 4 et 5 ne font pas partie du nombre
• 612 a un chiffre commun mal placé	• il reste comme chiffres possibles 0, □, □, □, □, □, 6, 7, 8, 9
• 547 a un chiffre commun mais mal placé	• c'est le chiffre 7
• 843 a un chiffre commun à la bonne place	• c'est le chiffre 8 • le nombre cherché est donc 876

L'intérêt de l'exercice réside dans la nécessité de traiter correctement les informations. Au départ, on envisage les possibles. La première information permet d'éliminer 3 chiffres. La deuxième, combinée à la troisième permet de trouver le chiffre 6, sa place et d'éliminer à nouveau 2 possibilités. Les informations qui suivent permettent d'obtenir très rapidement la solution.

Exercice de la page 106

« Le cube »



On a 8 petits cubes peints sur 3 faces : sommets du grand cube.
On a 12 petits cubes peints sur 2 faces : milieu de chaque arête.
On a 6 petits cubes peints sur une face : centre de chaque face.
On a un petit cube peint sur aucune des faces : il est au centre du grand cube.
Total : 27.
On peut vérifier qu'il y a bien 27 cubes : 3 x 3 x 3 cubes.

Exercice de la page 112

La stratégie semble évidente : l'enfant soustrait, par colonne, le plus petit nombre du plus grand, quel que soit la position de l'un et de l'autre dans la colonne. Cette procédure erronée n'est pas mise en défaut dans la première soustraction.

On peut faire l'hypothèse suivante : un enfant qui commence à faire des soustractions « sans retenue » ou à qui on répète que l'on ne peut retrancher a à b que si b est plus grand que a se place dans les conditions où « l'opération est légitime ».

Exercice de la page 113

Il y a là une erreur de raisonnement de la part du correcteur dans le dénombrement des événements : si l'on range les dés, le fait de ne pas avoir obtenu d'as sur le premier ne signifie pas l'absence d'as sur l'un des deux autres.

Probabilité d'avoir un as et un seul :
P1 = 1/6 x 5/6 x 5/6 + 5/6 x 1/6 x 5/6 + 5/6 x 5/6 x 1/6 = 3 (1/6 x 5/6 x 5/6) = 75/216
Probabilité d'avoir 2 as exactement : P2 = 3 (1/6 x1/6 x 5/6) = 15/216
Probabilité d'avoir 3 as exactement : P3 = (1/6 x1/6 x 1/6) = 1/216
La probabilité d'obtenir aucun as est : P4 = (5/6 x 5/6 x 5/6) = 125/216

Il n'y a pas d'autre événement possible dont la somme des probabilités doit être égale à 1. Ce qui se vérifie.

Exercice de la page 115

Exemples :

S_0	*2,15 4,01 6,12*	S_0 *non*	*21,5 4,01 1,612*
S_1	*4,15 4,21 5,22*	S_1 *non*	*4,15 4,145 4,1354*
S_2	*3,14 3,141 3,1415*	S_2 *non*	*3,104 3,145 3,0014*

L'exercice proposé par le professeur peut être réussi par des élèves utilisant des stratégies erronées (par exemple : S_1 et S_2). Les résultats ne sont donc pas significatifs de la compréhension de l'ordre dans les nombres décimaux. L'exercice est à reconstruire.

Exercice de la page 117

la première règle est fausse quel que soit l'ensemble numérique considéré.
Dans $\mathbb{N}$, s'agissant de la division euclidienne, l'idée première est celle de partage qui induit qu'on ne peut partager que si la quantité est suffisante. Or la division euclidienne de 3 par 7 donne 0 au quotient et 3 au reste.
Dans $\mathbb{R}$, diviser c'est multiplier par l'inverse. Tout réel non nul a un inverse.

La deuxième règle est vraie dans $\mathbb{N}$, et plus généralement dans les ensembles numériques positifs. Elle est fausse dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. : a – b se définit comme a + (– b)

La troisième règle est vraie dans $\mathbb{N}$ privé de 0 et de 1. Elle est fausse dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. (Exemple $x \frac{1}{2}$)

La quatrième règle est vraie dans $\mathbb{N}$, fausse dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$: $a + b > a \Leftrightarrow b > 0$

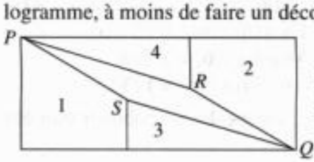
La cinquième règle est fausse dans $\mathbb{D}$.

Exercice de la page 119

$1\ cm^3 = 1$ millilitre et non pas $1\ cm^3 = 10$ millilitres.
La connaissance de la correspondance 1 cm = 10 mm est sans doute à l'origine de la confusion.

Exercice de la page 125

Dans le deuxième puzzle, le «segment» [PQ] est en fait un quadrilatère (très mince) qui a pour aire 1. Les bords des fragments 1, 2, 3 et 4 ne coïncident pas exactement avec la diagonale *PQ*, mais forment un parallélogramme PSQR qui est représenté, en exagérant ses proportions. La surface de ce parallélogramme représente le carré manquant. L'angle SPR est si petit que l'on ne remarque pas ce parallélogramme, à moins de faire un découpage et un réarrangement très minutieux.

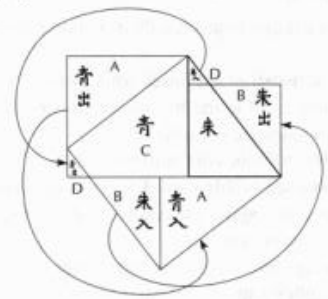


Ainsi, rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme…
Le découpage montre là, ses limites.

Exercice de la page 126

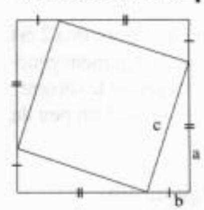
Cette activité n'est pas à rejeter, sous prétexte d'en avoir vu les limites dans l'exercice précédent. Par exemple, faire ce découpage avec 25 élèves ayant chacun leur triangle et constater qu'à chaque fois on obtient un angle plat est une démarche de type expérimental tout à fait intéressante à l'école élémentaire et au collège.

Exercice de la page 127



Le grand carré a pour aire A + B + C + D + E. Le carré de gauche a pour aire A + C + D. Le carré de droite a pour aire B + E. L'aire du grand carré est la somme des aires des deux carrés.

Exercice de la page 128



Soit a et b les mesures des côtés de l'angle droit et c la mesure de l'hypoténuse. l'aire du grand carré est $(a + b).(a + b) = (a + b)^2$. L'aire d'un triangle est $\frac{ab}{2}$.

L'aire du petit carré est c^2. Elle peut s'obtenir comme différence des aires du grand carré et des 4 triangles : $c^2 = (a + b)^2 - 2ab$ donc $c^2 = a^2 + b^2$

Exercice de la page 129

On retrouve les trois cas d'égalité des triangles connus :
– deux triangles qui ont un côté égal compris entre deux angles respectivement égaux sont égaux ;
– deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux sont égaux ;
– deux triangles qui ont leurs trois côtés égaux sont égaux ;

mais aussi le cas suivant : si deux triangles ont deux angles égaux et un côté égal, il sont égaux. (Sans que la position respective du côté par rapport aux angles soit imposée.)

Remarque : l'égalité des trois côtés impose l'égalité des triangles alors que l'égalité des trois angles donne des triangles semblables (mêmes formes mais pas obligatoirement mêmes dimensions).

Exercice de la page 148

La connaissance visée est que le produit de trois nombres permet des mesures en dimension 3.

Dans le premier cas, la question est posée sous forme d'énoncé. Si l'enfant sait, il amorcera une réponse. Seul le maître pourra attester la validité de la réponse. Il s'agit donc d'une situation de contrôle.

Dans le second cas, les enfants vont remplir la boîte et effectuer un comptage (selon des stratégies vraisemblablement diverses). À aucun moment, les enfants n'ont besoin d'anticiper. Il s'agit d'une situation de manipulation qui ne sollicite pas l'acquisition d'un savoir nouveau.

Dans le troisième cas, les enfants doivent imaginer une disposition et effectuer une comptabilité des cubes « qu'il y aurait ». Ils sont contraints de faire des prévisions selon des stratégies diverses. On peut imaginer qu'un remplissage effectif ultérieur à l'aide de cubes constituera un moyen de s'assurer (de valider) de la justesse des prévisions effectuées.

Exercice de la page 162

Réponse : c'est l'hypothèse 3 qui est la bonne.

Commentaire : Lorsque ce problème est proposé aux étudiants, l'hypothèse 2 est largement majoritaire dans les premières minutes de réflexion. L'argument généralement avancé, ayant statut de preuve pour la majorité du groupe. est le suivant : « Lorsque je ramène du second vers le premier récipient, je rapporte un peu de liquide B, donc il y a plus de B dans A que de A dans B ».

– Les changements de conviction sont nombreux.

– Le traitement de cas particuliers constitue un lieu privilégié de débats.

Comportements répétés :

– Après un exposé sur un cas particulier, (celui où la contenance de la cuillère est exactement le volume du liquide A (ou B), qui accrédite l'hypothèse 3, certains partisans de l'hypothèse 2 sont troublés. D'autres disent : « justement, c'est un cas particulier, il faut l'éliminer ».

Exercice de la page 165

A priori, il semble inutile que le candidat change de porte, puisqu'il y reste une chèvre et la voiture, donc le candidat a une chance sur deux de gagner. Pas si sûr… Une première approche consisterait à faire effectivement le jeu un certain nombre de fois et de s'intéresser à la fréquence des réussites. La revue, *Pour la science*, n° 167, septembre 1991, a conduit une simulation sur ordinateur : sur 100 000 épreuves, la stratégie qui consiste à rester devant la porte fut gagnante 33 498 fois et perdante 66 502 fois… La loi des grands nombres chère aux statisticiens nous permet de mettre en doute l'hypothèse « une chance sur deux ».

Démonstration : Soit C l'événement « avoir une chèvre derrière la porte » et A l'événement « avoir l'auto derrière la porte ». La probabilité pour que l'événement C soit réalisé lors du premier placement du candidat est : P (C) = 2/3. Et donc P (A) = 1/3.

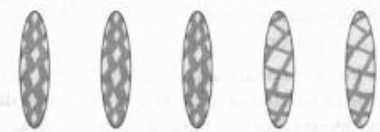
Lorsque C est réalisé, le fait de changer de porte fait gagner. Lorsque A est réalisé, le fait de changer de porte fait perdre. Donc, la probabilité de gagner en changeant de porte est égale à P (C) : soit 2/3. La probabilité de perdre en changeant de porte est égale à P (A) : soit 1/3. Il est donc préférable de changer de porte. (Ce que les 100 000 épreuves laissaient prévoir.)

Exercice de la page 165

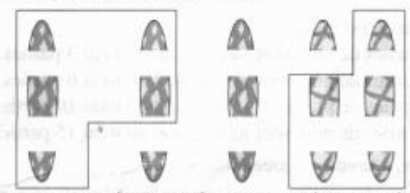
Une solution à laquelle on pense naturellement est :

« Le soldat qui a amené 2 pains reçoit 2 écus, celui qui a amené 3 pains reçoit 3 écus. »

Dessinons les pains



Imaginons les pains partagés pour le repas



pains apportés par le premier soldat — *pains apportés par le deuxième soldat*

Il est évident que pour que le partage soit équitable le premier soldat devrait recevoir 4 écus et le second 1 écu.

Exercice de la page 166

Le premier exercice se fonde sur un résultat acquis par construction. Il fait l'hypothèse que les élèves vont remarquer le rapport de 1/2 entre la mesure des deux angles.

Le deuxième exercice se fonde sur une conjecture qui pourra être avancée après plusieurs études. Il propose ensuite de construire une piste pour la démonstration de la conjecture établie. Cette démonstration peut être la suivante :

La somme des angles d'un triangle est de 180° donc $\widehat{RMO} + \widehat{MRO} + \widehat{MOR} = 180°$.

Ce triangle est isocèle donc $\widehat{MOR} = 180° - 2x$. En notant $x = \widehat{RMO}$.

Or $\widehat{MOR} + \widehat{RON} = 180°$ donc $\widehat{MOR} = 180° - \widehat{RON}$ donc $\widehat{RON} = 2x$.

Dans le premier exercice, rien n'indique à l'élève ce qu'il doit faire de sa remarque. Doit-il prendre ce résultat comme général ? La démarche effectuée est-elle une preuve ? Le deuxième exercice explicite ces deux points.

Cet étudiant confond conjecture et démonstration. Il parle de théorème alors qu'il ne s'agit que d'une supposition. Mais le fait de traduire les résultats expérimentaux en une écriture formelle lui donne l'impression d'avoir démontré.

Exercice de la page 169

Voici plusieurs solutions.

Première solution

Appelons n le nombre d'équipes de 2 joueurs. Une partie se joue dès que 2 équipes se rencontrent. On a autant de parties que de façons de choisir 2 objets parmi n à savoir

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Ce nombre est égal à 15. Cela signifie que :
$n\,(n-1) = 30$ ce qui est équivalent à $n^2 - n - 30 = 0$ équation du second degré de racines réelles – 5 et 6. Nous cherchons un nombre entier donc le nombre d'équipes est 6, et par suite il y a 12 joueurs.

Cette solution met en jeu des connaissances mathématiques du niveau terminale. Elle permet de trouver la réponse et d'en assurer la preuve dans un milieu de personnes qui peuvent reconnaître les connaissances utilisées.

Deuxième solution

Avec 2 équipes, 1 partie est jouée.
Avec 3 équipes, 2 parties de plus sont jouées, soit au total 3 parties.
Avec 4 équipes, 3 parties de plus sont jouées, soit au total 6 parties.
Avec 5 équipes, 4 parties de plus sont jouées, soit au total 10 parties.
Avec 6 équipes, 5 parties de plus sont jouées, soit au total 15 parties.

Il y a donc 6 équipes, à savoir 12 joueurs.

Cette solution ne met en jeu aucune connaissance mathématique particulière. Elle établit le résultat et doit emporter l'adhésion.

Troisième solution

	1	2	3	4	5	6	7	8	nombre de parties
1									0
2									1
3									1 + 2 = 3
4									1 + 2 = 6
5									1 + 2 + 3 + 4 = 10
6									1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
7									1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
8									...

On voit qu'avec 6 équipes, 15 parties sont jouées. Il y a donc 12 joueurs.

Cette solution demande d'organiser les informations dans un tableau sans présumer de la réponse. Elle permet de dénombrer les parties jouées avec 2 équipes, 3 équipes… Comme la précédente, elle doit emporter l'adhésion.

Quatrième solution

On a n équipes. Chaque équipe rencontre toutes les autres équipes, soit (n – 1) équipes. La partie « équipe A contre équipe B » et la partie « équipe B contre équipe
A » sont en fait une seule partie. Il y a donc $\frac{n\,(n-1)}{2}$ parties jouées.

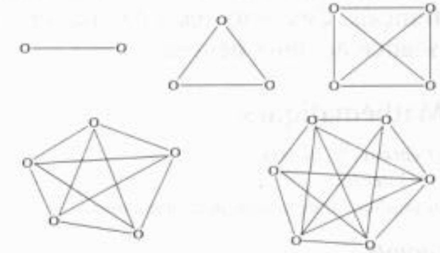
$\frac{n\,(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n\,(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = -5$ ou $n = 6$
$\Leftrightarrow n = 6$

Il y a 6 équipes donc 12 joueurs.

Une telle démonstration peut paraître difficile à comprendre à un niveau de scolarité pas trop élevé. Par contre, elle est très simple pour des gens qui ont l'habitude de manipuler les mathématiques.

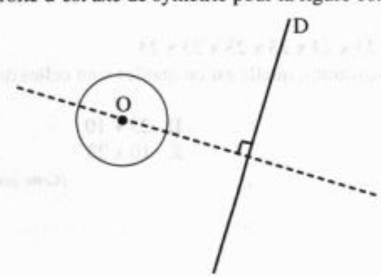
Autre solution

À découvrir sur les schémas suivants :



Exercice de la page 171

En Cours Moyen : Si la figure est dessinée sur une feuille, en pliant la feuille selon un diamètre orthogonal à la droite d, la figure se superpose à elle-même.
En quatrième : Soit d' une droite passant par le centre O du cercle et orthogonale à d. Cette droite d' est axe de symétrie pour la droite d. De plus, tout diamètre du cercle est axe de symétrie du cercle. Donc c'est aussi axe de symétrie pour le cercle. Donc la droite d' est axe de symétrie pour la figure constituée de la droite d et du cercle.



TEST DE PRÉ-RECRUTEMENT

à la préparation au concours de professeurs des écoles

Depuis trois ans, plusieurs IUFM organisent des tests de pré-recrutement en français et en mathématiques en vue d'accéder à l'année de préparation au concours de Professeur des Écoles. Le nombre important de candidats conduit les IUFM à présenter ces tests sous forme de questionnaires à choix multiples. Peu d'étudiants étant habitués au déroulement de ce type d'épreuve, nous présentons le test de mathématiques de l'Académie de Bordeaux de 1994, tel qu'il est soumis aux candidats. La grille des réponses justes figure page 2[illegible]6. Un QCM analogue est présenté pour l'épreuve de français. Ces deux tests doivent être réalisés en une seule séance de deux heures.

Épreuve de Mathématiques

Rappel : Durée de l'épreuve (1 heure)
Toute calculatrice est interdite.
Certaines questions impliquent de noircir plusieurs cases.

Questions à 3 points

1. Voici une addition.
23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23
Parmi les écritures suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui représentent le résultat exact ?

A 231 **D** 240
B 227 **E** 250
C 230

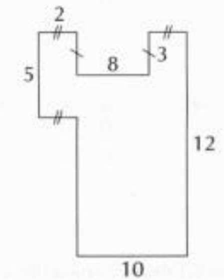
(Cette question vaut 3 points.)

2. Voici un produit.
23 x 23 x 23 x 23 x 23 x 23 x 23 x 23 x 23 x 23
Parmi les écritures suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui représentent le résultat exact ?

A 23^{10} **D** 23 + 10
B 23 x 10 **E** 10 x 23
C 230

(Cette question vaut 3 points.)

3. Voici une figure. Les traits sur certains côtés signifient l'égalité de ces côtés.



Quel est son périmètre ?

A 52 **D** 40
B 42 **E** 54
C 39

(Cette question vaut 3 points.)

4. La circonférence de la terre est de 40 000 km, donc son rayon mesure environ :

A 4 400 km **D** 12 800 km
B 10 400 km **E** 8 800 km
C 6 400 km

(Cette question vaut 3 points.)

5. Parmi les résultats figurants dans les cases qui suivent, un seul est le résultat de la multiplication de 183 par 425 : lequel ?

A 7 776 **D** 7 775
B 77 776 **E** 7 778
C 77 775

(Cette question vaut 3 points.)

6. Le grand Général Dussabre est né en 1574. Il meurt à la célèbre bataille de Gabegie qui s'est déroulée cent ans après 1515. À quel âge meurt-il ?

A 141 ans **D** 89 ans
B 39 ans **E** 41 ans
C 51 ans

(Cette question vaut 3 points.)

7. Ma montre prend deux minutes de retard toutes les heures. Il est midi et elle est à l'heure. Dans combien de temps aura-t-elle pris une heure de retard ?

A 2 jours **D** 3 jours
B 30 heures **E** 20 heures
C 10 heures

(Cette question vaut 3 points.)

8. Sur un plan, on lit « 2 cm pour 1 km ». Quelle distance sépare deux villes, à vol d'oiseau, qui sont distantes de 15 cm sur la carte ?

A 75 km **D** 7,5 km
B 15 km **E** 3 km
C 30 km

(Cette question vaut 3 points.)

9. Un litre de mercure c'est aussi :

A 1 kg de mercure
B 1 dm^3 de mercure
C 100 centilitres de mercure
D 100 millilitres de mercure
E 100 mm^3 de mercure

(Cette question vaut 3 points.)

10. Un champ carré mesure 5 000 mètres de côté. Sa superficie est de :

A 50 000 m^2
B 5 000 m^2
C 25 000m^2
D 25 000 000 m^2
E 250 000 m^2

(Cette question vaut 3 points.)

Questions à 6 points

11. Un grand cercle a un rayon 2 fois plus grand que celui d'un autre plus petit cercle.
L'aire du grand disque est :

A 3,14 fois l'aire du petit
B 2 fois l'aire du petit
C 1,5 fois l'aire du petit
D 4 fois l'aire du petit.
E 2,5 fois l'aire du petit

(Cette question vaut 6 points.)

12. Parmi les résultats figurants dans les cases qui suivent, un seul est le résultat de la division de 46968 par 456 : lequel ? (Information : la division tombe juste.)

A 12
B 104
C 103
D 1 037
E 1 038

(Cette question vaut 6 points.)

13. Je suis un décimal avec deux chiffres après la virgule. Mon chiffre des centièmes est 5 et mon nombre de dixièmes est 12. Qui suis-je ?

A 1,25
B 120,05
C 12,05
D 0,125
E 1,125

(Cette question vaut 6 points.)

14. Soit le nombre positif n qui, multiplié par lui-même donne 24. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A n est plus grand que 12
B n est plus grand que 4
C n est plus petit que 5
D n est plus grand que 5
E n est plus petit que 6

(Cette question vaut 6 points.)

15. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ? :

A 1,5 + 1,5 = 3
B 1,5 x 1 = 1
C 2 x 0,5 = 1
D 0,5 x 1 = 1
E 2/0,5 = 4

(Cette question vaut 6 points.)

16. « Je suis un nombre entier dont le chiffre des unités est zéro. Mon chiffre des dizaines est le double du chiffre des unités et mon nombre de centaines est 20. Qui suis-je ?

A 200
B 2 000
C 2 020
D 20 000
E 20 220

(Cette question vaut 6 points.)

17. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A Cent millions s'écrit avec le chiffre « un » suivi de sept « zéros ».
B Le nombre de centaines de cinq cent soixante dix huit est 5.
C 14,00 est plus petit que 14.
D 00,3040 et 0,304 sont deux nombres égaux.
E 14,00 est plus grand que 14

(Cette question vaut 6 points.)

18. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A 4 x 10 x 10 x 10 < 4 x 10 x 10
B 0,5 x 0, 5 x 0, 5 x 0,5 < 0,5 x 0, 5 x 0, 5
C 3 : 0,5 < 3 : 2
D 4. 6 < 4 – 7
E 4 x (– 7) < 4 x (– 8)

(Cette question vaut 6 points.)

19. Un rectangle et un carré ont la même aire. Le côté du carré mesure 9 m et la largeur du rectangle mesure 3 m. Calculer la longueur du rectangle.
Quel est le calcul qui correspond à la question posée ?

A (9 + 9) : 3
B (9 x 9) x 3
C (9 x 3) : 9
D (9 x 3) + 9
E (9 x 9) : 3

(Cette question vaut 6 points.)

20. À vol d'oiseau, deux villes sont distantes de 75 km. Quelle distance les sépare sur une carte au 1/250 000 ?

A 7 cm
B 3 cm
C 21 cm
D 30 cm
E 17,5 cm

(Cette question vaut 6 points.)

Questions à 9 points

21. Mon copain et moi avons 400 francs. J'en ai dépensé les 3/4. Mon copain a dépensé l'équivalent d'un tiers de ce que j'ai dépensé.
Combien nous reste-t-il ?

A 100 F
B 133 F
C 33 F
D 300 F
E 0 F

(Cette question vaut 9 points.)

22. Un losange a un côté qui mesure 5 cm et un angle de 45°. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A Le périmètre est 20 cm.
B L'aire est 25 cm2
C Le périmètre est 10 cm.
D Je n'ai pas assez de renseignements pour calculer l'aire.
E Je n'ai pas assez de renseignements pour calculer le périmètre.

(Cette question vaut 9 points.)

23. Dans un sondage, 50 % des personnes interrogées ne sont pas encore fixées sur leur choix aux élections présidentielles, 24 % optent pour le candidat A, 21 % pour le candidat B, les autres se partagent sur les autres candidats.
Combien le candidat A obtiendra-t-il, en pourcentage, de voix si 30 % de ces personnes non encore fixées viennent à voter pour lui ?

A 54 %
B 74 %
C 39 %
D 32 %
E 30 %

(Cette question vaut 9 points.)

24. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{4}}$

B $\dfrac{2}{1} = \dfrac{6}{3}$

C $\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{7}}$

D $\dfrac{8}{32} = \dfrac{64}{16}$

E $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{\frac{x}{2}}{1}$

(Cette question vaut 9 points.)

25. La somme de $\frac{7}{4}$ et de $\frac{7}{6}$ est :

A $\frac{14}{10}$
B $\frac{7}{12}$
C $\frac{49}{24}$
D $\frac{2}{7}$
E $\frac{35}{12}$

(Cette question vaut 9 points.)

26. Voici une équation dans l'ensemble des nombres réels, où x est l'inconnue :
$3x^2 + 4x + 5 = 3x^2 + 4x + 5$
Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A Cette équation n'admet aucune solution.
B 0 est une solution.
C Cette équation admet toute valeur de x comme solution.
D 4 est une solution.
E 165 est une solution.

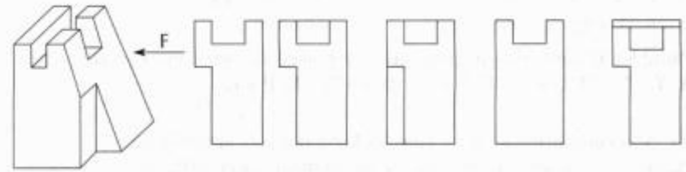
(Cette question vaut 9 points.)

27. Soit la fonction f telle que $f(x) = 3x + 1$
Parmi les phrases suivantes quelle est ou quelles sont celles qui ont du sens ?

A Calculer $f(x)$ pour $x = 3$
B Calculer $f(x)$ pour $f = 2$ et $x = 3$
C Calculer $f(x)$ pour $f = 2$
D Trouver x pour que $f(x) = 7$
E Trouver x pour $f = 5$

(Cette question vaut 9 points.)

28. Lorsque l'on regarde le solide selon la direction F, quelle vue de côté a-t-on ? (Il y a une réponse juste parmi les cinq.)



Solide vue 1 vue 2 vue 3 vue 4 vue 5

A vue 1
B vue 2
C vue 3
D vue 4
E vue 5

(Cette question vaut 9 points.)

29. Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A La somme de deux décimaux est toujours un décimal.
B Le quotient de deux décimaux est toujours un décimal.
C Entre 1,27 et 1,28 il n'y a pas de décimal.
D Entre 1,27 et 1,28 il y a une infinité de décimaux.
E 0,27 est plus petit que 0,206

(Cette question vaut 9 points.)

30. On considère la liste des nombres : $1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{7}{9}$

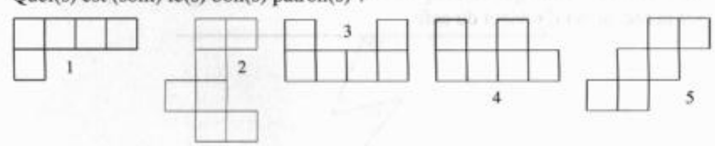
Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A Le plus grand de la liste est $\frac{7}{9}$
B Le plus petit de la liste est $\frac{1}{3}$
C Il y a autant de nombres supérieures à $\frac{5}{9}$ que de nombres inférieurs à $\frac{5}{9}$
D Tous ces nombres sont supérieurs à 0,2
E Tous ces nombres sont inférieurs à $\frac{9}{7}$

(Cette question vaut 9 points.)

Questions à 12 points

31. On désire faire une boîte en forme de cube ouvert, donc il doit manquer une face, mais, par contre, le fond de la boîte doit être doublé pour être plus solide. Quel(s) est (sont) le(s) bon(s) patron(s) ?



A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

(Cette question vaut 12 points.)

32. On donne les calculs suivants :

P = 0,1 x (0,3 + 1 995) S = 0,3 x 1995
Q = 0,1 x (0,3 x 1 995) T = 199,5 + 0,03
R = 0,03 + (0,1 x 1 995) U = 199,8

Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ?

A T = U **B** Q = S **C** P = U **D** P = T **E** P = R

(Cette question vaut 12 points.)

33. Voici une affirmation : « Tous les bordelais sont antipathiques. »
Parmi les réponses suivantes quelle est ou quelles sont celles qui sont justes du point de vue du raisonnement ?

A Cette affirmation est fausse car je connais Jean qui est bordelais et qui est sympathique.
B Je ne peux pas savoir si c'est vrai ou faux car je ne connais pas tous les bordelais.
C Cette affirmation est fausse car il existe des bordelais sympathiques.
D C'est faux, mon voisin est parisien et il est désagréable.
E C'est vrai, mon voisin est bordelais et il est désagréable.

(Cette question vaut 12 points.)

34. Dans un collège, le nombre d'élèves a baissé de 10 % en un an. Par contre, le pourcentage de filles est passé de 50 % à 55 %.
Parmi les affirmations suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui sont vraies ? le nombre de filles du collège…

A a augmenté de 1 %
B a augmenté de 0,5 %
C a baissé de 1 %
D est resté le même
E a baissé de 0,5 %

(Cette question vaut 12 points.)

35. Parmi les expressions suivantes, quelle est ou quelles sont celles qui peuvent être négatives pour certaines valeurs de x ? (x est pris dans l'ensemble des nombres réels.).

A $x + x + x$
B $x^2 + 1$
C $x^4 + x^2 + 1$
D $x^2 + x^3 + 1$
E $x^2 - 1$

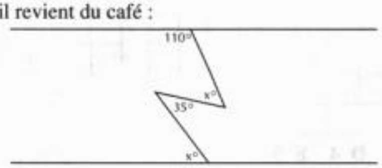
(Cette question vaut 12 points.)

36. J'imagine que je plie une feuille de carton en deux, puis une fois pliée, je continue à la plier encore en deux, et ainsi de suite… J'ai pris une feuille d'épaisseur de 1 millimètre. (On suppose que le pliage est toujours possible…). Pour obtenir une épaisseur qui dépasse un mètre, il suffit de plier :

A 10 fois
B 1 000 fois
C 100 000 fois
D 2 000 fois
E 5 000 fois

(Cette question vaut 12 points.)

37. Voici le chemin que suit le père Mathieu, un vieux loup de mer, pour traverser la rue quand il revient du café :

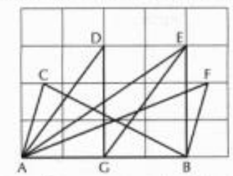


Quel est la valeur de l'angle x en degré ?

A 52° **B** 52,5° **C** 5° **D** 53,5° **E** 54°

(Cette question vaut 12 points.)

38. La figure ci-dessous est dessinée sur un réseau de mailles carrées.



Parmi les égalités suivantes qui concernent les aires des triangles de cette figure, quelles sont celles qui sont justes ?

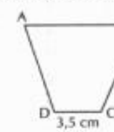
A ABC = AFB
B ABC = ADG
C ADG = AEG
D AFB = AEB
E AEB = 2 (AEG)

(Cette question vaut 12 points.)

39. Parmi les problèmes ci-dessous, quel est celui ou quels sont ceux dont la mise en équation est : $3x + 3{,}5 = 20$?

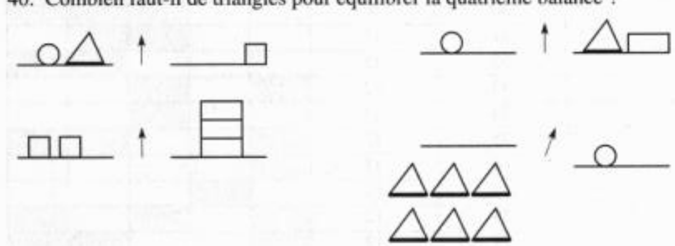
A Maxime a acheté un croissant à 3,50 F et 3 chocolatines. Il a dépensé au total 20 F. Quel est le prix de la chocolatine ?
B Pour l'achat de trois feutres et d'un correcteur, Justine a payé 20 F. Sachant que le prix d'un feutre est de 3,50 F, quel est le prix du correcteur ?
C Norbert pense à un nombre décimal. Il ajoute 3,5 et il multiplie ce résultat par 3. Il obtient finalement 20. À quel nombre a-t-il pensé ?
D Un commerçant possède 20 mètres de tissu. Il débite 3 coupons de même longueur et constate qu'il lui en reste 3,5 m. Quelle est la longueur d'un coupon ?
E Le périmètre de la figure ci-dessous est de deux décimètres. On sait que AB = AD = BC = x.

Quelle est la valeur de x en cm ?



(Cette question vaut 12 points.)

40. Combien faut-il de triangles pour équilibrer la quatrième balance ?



A 6 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 2

(Cette question vaut 12 points.)

Fin de l'épreuve

Voici la grille des réponses justes :

	N° de la question	Nombre de points attribués	A	B	C	D	E
	1	3					
	2	3					
	3	3					
	4	3					
	5	3					
	6	3					
	7	3					
	8	3					
	9	3					
	10	3					
	11	6					
	12	6					
	13	6					
	14	6					
	15	6					
	16	6					
	17	6					
	18	6					
	19	6					
	20	6					
	21	9					
	22	9					
	23	9					
	24	9					
	25	9					
	26	9					
	27	9					
	28	9					
	29	9					
	30	9					
	31	12					
	32	12					
	33	12					
	34	12					
	35	12					
	36	12					
	37	12					
	38	12					
	39	12					
	40	12					

INDEX

BIBLIOGRAPHIE

Arsac G. : « L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique », *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol. 8/3, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1987.

Arsac G., Chapiron G., Colonna A., Germain G., Guichard Y., Mante M. : « Initiation au raisonnement déductif au collège », Éd. PUF, 1992.

Artigue M. : « Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques – Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques », Thèse de doctorat d'État, Université Paris VII, 1984.

Bachelard G. : « La formation de l'esprit scientifique », Librairie philosophique J. Vrin, 1938.

Balacheff N. : « Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège », Thèse de doctorat d'État, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988.

Barbin E. : « La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques », Bulletin *APMEP*, n° 366, 1988.

Berthelot R., Salin M.H., : « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire », Thèse Université de Bordeaux, 1992.

Boschet F. : « Un aperçu des travaux de Vygotsky – Leontev et Bruner, disciples de Vygotsky », *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 52, IREM de Paris VII, 1988.

Briand J : « L'énumération dans la mesure des collections : un dysfonctionnement de la transposition didactique », Thèse Université Bordeaux I, 1993.

Brousseau G. : « Les obstacles épistémologiques et les problèmes de mathématique », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4/2, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1983.

Brousseau G. : « Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques », Thèse de doctorat d'État, Université de Bordeaux, 1986.

Brousseau G. : « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 7/2, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1986.

Brousseau G. : « Les différents rôles du maître », Actes du XIVe colloque Inter-IREM des PEN Angers – IREM de Nantes, 1987.

Brousseau G. : « Exemple : le nombre naturel : macro et micro ingénierie. Situations a-didactiques et didactiques », *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, Actes de l'université d'été, IREM de Bordeaux, 1988.

Brousseau G. : « Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège », *Petit X*, n° 21, 1989.

Brousseau G. : « Le contrat didactique : le milieu », *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 9/3, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1990.

Brousseau G. : « Didactique des mathématiques : définitions et commentaires », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, COPIRELEM-IREM de Paris VII, 1991.

Brousseau G., Centeno J. : « Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 11/2.3, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1992.

Butlen D., Pezard M. : « Analyse de préparation sur les écritures multiplicatives au C.E. », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, COPIRELEM-IREM de Paris VII, 1991.

Charmeux E. : « Apprendre à lire : échec à l'échec », Éd. Milan Éducation, 1987.

Chevallard Y. : « La transposition didactique », Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.

Chevallard Y. : « Enseignement des mathématiques et besoins professionnels », Actes du XVIe colloque Inter-IREM des PEN, IREM de Bordeaux, 1989.

Chevallard Y. : « Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12/1, Éd. La pensée sauvage, Grenoble, 1992.

Chevallard Y. : « Pour en finir avec une certaine phobie culturelle », *Science et Vie*, hors série n° 180, 1992.

Chevalier M.C. : « Étude de feed-back dans les situations a-didactiques », D.E.A., IREM de Bordeaux, 1991

Chevalier M.C. : « Situation d'apprentissage, actions et rétroactions : une expérience en cours préparatoire », *Grand N*, n° 51, 1992-93.

Conne F. : « Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12/2.3, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1993.

Dhombres J., Dahan-Dalmetico A., Bkouche R., Houzel C., Guillemot M. : « Mathématiques au fil des âges », IREM, *Groupe épistémologie et histoire*, Éd. Gauthier-Villars, 1987.

Douady R. : « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7/2, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1987.

Douady R., Perrin M.J. : « Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane », *ESM*, vol. 20, 1989.

Duval, R. : « Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? », *Petit X*, n° 31, 1992-1993.

Duverneuil J., Savioz M.F., Chevalier M.C. : « Prendre en compte les erreurs en mathématiques à l'école et au collège », Collection *Savoir et Faire*, CRDP Midi-Pyrénées, 1995.

Escarabajal : « Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques », *Revue française de pédagogie*, n° 82.

Harrisson Ratsimba Rajohn : « Éléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 3/1, pp. 65-113, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble,1982.

Henry M. : « Didactique des mathématiques : une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignants », IREM Besançon, 1991.

Huguet F. : « La voiture et les chèvres », *Documents pour la formation des professeurs d'écoles en didactique des mathématiques*, COPIRELEM-IREM de Bordeaux, 1992.

Itard J. : « Essai d'histoire des mathématiques », Librairie des sciences et techniques A. Blanchard, 1984.

Johsua S., Dupin J.J. : « Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques », Éd. PUF, 1993.

Laborde C. : « Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques », Thèse d'État IMAG Grenoble, 1982.

Margolinas C. : « Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion », *Recherches en diactique des mathématiques*, vol. 12/1, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1992.

Milhaud N. : « Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves », IREM de Bordeaux, 1980.

université de Bordeaux, 1992.

PEAULT H. : « Proportionnalité », *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, COPILEREM-IREM de Bordeaux, 1992.

PERRIN-GLORIAN M.J. : « Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté au C.M.-6e », Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VII, 1992.

REBIERE M. : « Rôle de l'énoncé dans la résolution de problèmes », DEA, Université de Bordeaux, Sciences de l'Éducation, 1991.

RICHARD J.F. : « Traitement de l'énoncé et résolution de problèmes », *Bulletin de psychologie*, n° 375.

ROBERT A. : « Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants) », *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 50, IREM de Paris VII, 1988.

ROBINET J. : « De l'ingénierie didactique », *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 1, IREM de Paris VII.

ROGALSKI J. : « Quelques éléments de théorie piagetienne et didactique des mathématiques », *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 2, IREM de Paris VII.

SALIN M.H. : « Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire », DEA. IREM de Bordeaux, 1976.

VERGNAUD G. : « L'enfant, la mathématique et la réalité », Éd. Peter Lang, 1981.

VERGNAUD G. : « La théorie et les champs conceptuels », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10/2.3, Éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 1990.

VINRICH G. : « 50 défis pour petits et grands », IREM de Bordeaux, 1988.

REVUES

RDM, Recherche en Didactique des Mathématiques, Éditions La Pensée sauvage, Grenoble.

Petit X, journal pour les enseignants de mathématiques et de sciences physiques du premier cycle de l'enseignement secondaire, IREM de Grenoble.

Grand N, revue de mathématiques, sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement élémentaire et préélémentaire, IREM de Grenoble.

ANNALES

Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école. COPIRELEM-IREM de Bordeaux (1992-1993-1994-1995).

Sélection de sujets et corrigés accompagnés d'un glossaire de didactique COPIRELEM-IREM de Bordeaux (1995).

COLLOQUES COPIRELEM

Aides pédagogiques rédigées par la COPIRELEM et publiées par l'APMEP.

Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques.

- Actes du stage de Cahors, 1991, COPIRELEM-IREM de Paris VII.
- Actes du stage de Pau, 1992, COPIRELEM-IREM de Bordeaux.
- Actes du stage de Colmar, 1993, COPIRELEM-IREM de Bordeaux et Paris VII.

Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire. Actes de l'université d'été d'Olivet, 1988, IREM de Bordeaux.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Imprimé en France par Pollina s.a. 85400 Luçon - 68725