

# Les modes de calcul

*Le rapport entre calcul et construction du sens des opérations est dialectique. Sans mise en perspective dans un problème, le sens d'une opération ne peut pas se construire, mais sans recherche de stratégies de calcul pour le résoudre, le travail sur le problème ne peut aboutir. Il est donc indispensable de mener simultanément le travail sur les problèmes et celui sur les procédés de calcul.*

*Par ailleurs, la résolution des problèmes arithmétiques favorise la maîtrise de certaines relations numériques et permet aux élèves d'éviter certaines erreurs de calcul. Ainsi, pour calculer  $1,70 \times 4$  en dehors de tout contexte, certains élèves proposent 4,280, considérant le nombre décimal comme un couple de deux entiers séparés par une virgule. Mais dans un problème de monnaie de type « Un objet coûte 1,70 euros, combien coûtent 4 objets ? », les mêmes élèves sont capables de trouver la bonne réponse parce que, dans le contexte de la monnaie, ils transforment 1,70 euros en 170 centimes, ils calculent  $170 \times 4$  puis ils décomposent 280 centimes en 2 euros et 80 centimes ; ils utilisent, en quelque sorte, des propriétés de la multiplication et leur connaissance sociale de la monnaie pour répondre.*

## 1. Des expressions variées :

**Calcul mental, calcul en ligne, calcul automatisé, calcul réfléchi, calcul raisonné, calcul rapide, calcul écrit ...**

### **Un regard qui met en avant le type de fonctionnement cognitif convoqué**

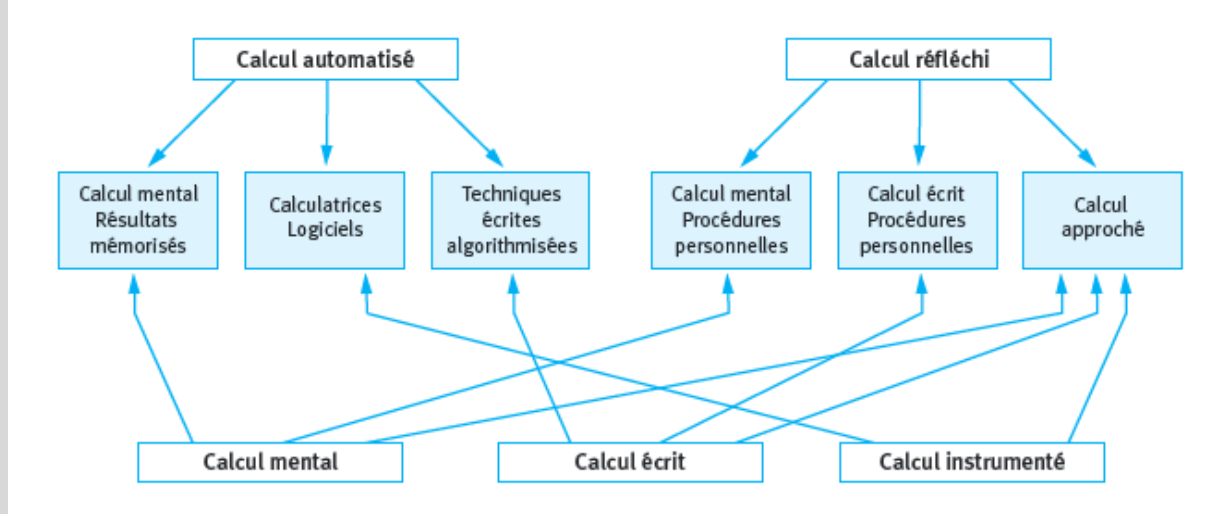
On trouve ici deux grands modes :

- le calcul réfléchi ou raisonné actuellement désigné par l'expression **calcul en ligne** qui nécessite de la part du sujet un travail cognitif spécifique : analyse des données, recherche de stratégies adaptées à ces données, mise en oeuvre de ces stratégies et contrôle des étapes et du résultat ;
- le calcul automatisé, c'est-à-dire un calcul dans lequel, à chaque étape, le sujet ne se pose pas de question sur ce qu'il a à faire et restitue des faits numériques mémorisés ainsi que des stratégies également mémorisés.

### **Un regard qui met en avant le moyen utilisé pour calculer**

On trouve alors trois grands modes :

- le calcul mental (effectué dans la tête) ;
- le calcul écrit qui nécessite l'utilisation d'un crayon et d'un support pour écrire ;
- le calcul instrumenté (il nécessite un matériel spécifique : abaque, table à compter, règle à calculer, calculatrice, logiciel de calcul).



Cette classification contribue à préciser des types de fonctionnement qui peuvent être utilisés par les élèves ; il ne faut cependant pas oublier que :

- d’une part, au cours d’un même calcul les élèves peuvent passer d’un mode de fonctionnement à un autre ;
- d’autre part, la construction d’un algorithme n’est finalement qu’une optimisation, dans le temps, de procédures de calcul réfléchi.

## 2. Le calcul réfléchi ou calcul en ligne

La terminologie « calcul réfléchi » ou « calcul en ligne » met l’accent sur l’activité cognitive du sujet en train de calculer. Les procédures utilisées sont en effet caractérisées par le fait que le sujet prend en compte les données numériques fournies, les analyse, les situe dans le réseau des nombres, repère leurs particularités et utilise ces particularités pour choisir le traitement qu’il va leur faire subir. Ce traitement dépend étroitement des nombres en jeu et est donc à créer à chaque nouveau calcul mais il diffère aussi suivant les individus, chacun choisissant parmi ses connaissances celles qui lui permettent de traiter l’opération au moindre coût. De ce fait, pour chaque individu, le choix des procédures évolue dans le temps avec l’acquisition de nouvelles connaissances et la pratique.

Exemple

- Voici 4 méthodes pour le calcul de  $17 \times 8$

**1.** Décomposer 17 en  $10 + 7$

On a donc  $(10 \times 8) + (7 \times 8) = 80 + 56 = 136$

**2.** Décomposer 17 en  $20 - 3$

$(20 - 3) \times 8 = (20 \times 8) - (3 \times 8) = 160 - 24 = 160 - 20 - 4 = 136$

**3.** Décomposer 8 en  $10 - 2$

$17 \times 8 = (17 \times 10) - (17 \times 2) = 170 - 34 = 170 - 30 - 4 = 140 - 4 = 136$

**4.** Reconnaître dans 8 le cube de 2 et donc doubler trois fois de suite

$17 \times 8 = [(17 \times 2) \times 2] \times 2 = (34 \times 2) \times 2 = 68 \times 2 = 136$

- Pour le calcul de  $17 \times 9$ , les trois premières méthodes peuvent s’appliquer mais pour utiliser la quatrième, il faut reconnaître dans 9 le carré de 3 et de plus il faut savoir multiplier 17 par 3 rapidement ce qui est a priori plus difficile que « doubler ».
- Pour le calcul de  $17 \times 7$ , la quatrième méthode s’avère impossible.

Ce mode de calcul lié à la nature des nombres en jeu peut se faire mentalement car les nombres sont envisagés dans leur globalité et non pas chiffre à chiffre, il peut se faire aussi par écrit, en utilisant diverses formes de schémas : schémas fléchés, arbres de calcul, utilisation de quadrillage, etc. pendant toute la phase de construction du sens des opérations puis, plus tard, à la fois mentalement et par écrit lorsque le calcul est complexe : le sujet peut en effet avoir besoin de noter des résultats intermédiaires.

## **Le calcul écrit réfléchi**

Dès que le professeur propose aux élèves des situations d'approche d'une nouvelle opération, ceux-ci mettent en oeuvre des procédures de résolution personnelles souvent empiriques, très liées aux nombres en jeu et au contexte de la situation. Parmi ces procédures, certaines peuvent faire l'objet d'une explicitation et d'une forme écrite spécifique qui fixeront la « manière de faire », de telle sorte qu'elles puissent être utilisées par la suite en calcul mental réfléchi.

Par exemple, pour calculer le terme manquant de l'addition à trou  $738 + ? = 2\,563$ , les procédures de calcul réfléchi écrit (sauts sur la droite numérique ou décomposition de 738) précèdent la construction de la technique et pourront être utilisées ultérieurement en calcul mental réfléchi.

Il en est de même pour les procédures de calcul d'un quotient par additions ou soustractions du diviseur qui conduiront les élèves à comprendre la technique usuelle de la division.

## **Le calcul mental réfléchi**

C'est par la pratique régulière que les élèves vont progressivement développer des compétences de calcul mental réfléchi en mobilisant les connaissances qu'ils construisent sur les nombres.

Le calcul mental réfléchi a donc de nombreuses fonctions. Il permet de donner le résultat d'un calcul sans l'aide de l'écrit ou d'une calculatrice, ce qui est utile dans la vie quotidienne. Il permet de donner l'ordre de grandeur d'un résultat, ce qui peut être utile à la fois dans la vie quotidienne et pour contrôler un calcul effectué par écrit ou à la calculatrice. Mais il a aussi pour but de rendre les nombres « familiers » aux élèves : il les conduit à envisager chaque nombre sous de nombreux aspects ou points de vue, liés à leurs propriétés, à mettre les nombres en réseau, en fonction de leurs caractéristiques, et ainsi à enrichir la représentation qu'ils se font des nombres de manière à rendre disponibles ces représentations lors de la résolution d'un problème.

Rappelons aussi que les travaux de recherche menés par D. Butlen, A.-M. Montfort et M. Pézard<sup>1</sup> ont montré que l'accroissement de compétences en calcul mental conduisait à une amélioration des performances en résolution de problèmes. En effet, une certaine aisance en calcul mental permet aux élèves de se décharger de l'angoisse du calcul ou de la surcharge de travail qu'implique celui-ci et ainsi de se donner les moyens de faire des hypothèses et de faire des choix avant de se lancer dans la résolution effective. Cela leur permet aussi d'estimer l'ordre de grandeur d'un résultat possible et de vérifier leurs calculs.

---

<sup>1</sup> D. Butlen, A.-M. Montfort, M. Pézard (Copirelem), *Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes* in Repères, n° 41, octobre 2000, pp. 5-24, TOPIQUES Éditions, Metz.

De nombreuses activités ou de nombreux jeux de calcul mental ont cette fonction d'enrichir les connaissances des élèves sur les nombres, citons notamment les jeux de furet, le jeu du « tout sur le nombre », le jeu « le compte est bon », le jeu « le défi à 100 », etc.

## **Le calcul instrumenté réfléchi**

Nous appelons « calcul instrumenté » le calcul qui s'effectue à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul. Contrairement à une opinion trop répandue, l'usage d'instruments de calcul ne rend pas obsolètes les autres formes de calcul. Il nous semble fondamental de développer parallèlement chez les élèves des compétences spécifiques qui leur permettent de calculer en l'absence d'instruments mais aussi avec les instruments, de manière à ce qu'ils utilisent ceux-ci de manière raisonnée : prévision de l'ordre de grandeur d'un résultat et de sa plausibilité, prise d'indices sur la vraisemblance des chiffres obtenus, raccourcis de calcul...

L'introduction des calculatrices dans les classes, loin de faire disparaître les autres activités de calcul, nous semble être au contraire un moyen de donner du sens à ces activités de calcul, de développer leur aspect fonctionnel et même de confronter les élèves à de vrais petits problèmes mathématiques à leur niveau. Ainsi demander de calculer avec la calculatrice en CM2  $64 \times 28$  puis sans effacer ni revenir à 0 de calculer  $64 \times 29$ , permet d'utiliser en acte les propriétés de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou encore demander en CE1 d'afficher 235 puis sans effacer l'écran d'afficher 245 permet de travailler les unités de numération.

## **3. Le calcul automatisé**

### **Le calcul écrit automatisé<sup>2</sup> : algorithmes de calcul**

Un algorithme de calcul est un procédé qui est caractérisé par le fait qu'il se déroule de manière identique quelles que soient les valeurs numériques auxquelles on l'applique. Les algorithmes de calcul sont « conventionnels », ils varient suivant les époques et les cultures (on n'effectue pas les divisions de la même manière en France, en Angleterre ou en Espagne, la technique française actuelle est très différente de celle utilisée en France au XVIIe siècle). Pour être intéressant, un algorithme de calcul doit être relativement économique, il doit être fiable et ne doit pas être trop difficile à retenir. Il faut distinguer la phase de construction de l'algorithme, qui repose sur des raisonnements s'appuyant sur les propriétés des nombres et des opérations, de son utilisation ultérieure. En effet, une fois maîtrisé, il peut être appliqué de manière « semi-automatique », entendons par là qu'à chaque étape du calcul, le sujet ne doit pas se poser de questions pour savoir comment il va continuer. Il ne faudrait pas en déduire que le calcul algorithmisé ne convoque jamais une réflexion chez l'élève, mais l'un des objectifs de l'apprentissage de ce type de calcul est de rendre l'élève capable de le conduire de manière quasi automatique par l'utilisation de conduites invariantes ce qui assure d'une part un certain gage de réussite à l'opération et d'autre part une certaine rapidité.

---

<sup>2</sup> La terminologie « calcul posé » recouvre ce mode de calcul.

Les techniques de l'addition et de la soustraction en colonne, de la multiplication posée, de la division en utilisant la « potence » sont ainsi des algorithmes de calcul qui sont enseignés à l'école et qui doivent être appris et retenus par les élèves.

Insistons sur le fait que connaître l'algorithme de calcul d'une opération n'est pas le gage d'une connaissance approfondie de cette opération, c'est-à-dire d'une reconnaissance des situations dans lesquelles celle-ci est nécessaire. De même, ne pas connaître un algorithme ne signifie pas nécessairement ne pas comprendre l'opération. Le travail d'acquisition d'un algorithme, s'il ne peut être confondu avec le travail de construction du sens d'une opération, peut cependant y contribuer.

La mise en oeuvre d'un algorithme de calcul nécessite une très bonne connaissance de nombreux « faits numériques », tels que les résultats des tables d'addition et de multiplication, et une très bonne compréhension de la numération décimale de position, mais ne nécessite pas nécessairement la maîtrise des propriétés qui permettent de le justifier mathématiquement.

L'apprentissage des techniques opératoires écrites a eu, pendant longtemps, une place prépondérante dans les activités mathématiques proposées aux élèves à l'école élémentaire : on pensait alors qu'il fallait apprendre à faire les opérations avant d'apprendre à les utiliser.

Depuis plusieurs années, l'acquisition de techniques, tout en restant très présente, est passée au second plan par rapport au travail sur le sens des notions : il semble plus judicieux de mettre les enfants en face de problèmes ayant du sens pour eux, de les laisser mettre en oeuvre des procédures de calcul empiriques s'appuyant sur leurs connaissances anciennes pour résoudre le problème posé. L'optimisation des procédures de calcul utilisées permet alors d'introduire l'apprentissage des techniques algorithmiques conventionnelles. Viennent ensuite les phases d'entraînement indispensables : ce sont les « gammes » du mathématicien en herbe !

## **Le calcul mental automatisé**

Naturellement, pour que les élèves puissent mener à bien un calcul réfléchi écrit ou mental ou un calcul écrit algorithmisé, il est indispensable qu'ils puissent utiliser un certain nombre de résultats mémorisés, sans avoir à les « reconstruire » à chaque fois. Le calcul mental automatisé renvoie à cette activité spécifique de mémorisation de « faits numériques » de manière à ce que les élèves puissent les restituer de manière automatisée lors d'un calcul. Il intervient donc tout autant dans le calcul réfléchi que dans le calcul écrit algorithmisé.

De nombreuses activités spécifiques et régulières doivent naturellement être menées avec les élèves pour permettre la mémorisation « définitive » de « faits numériques » essentiels : tables d'addition et de multiplication, mais aussi liste des multiples de certains nombres : 10 ; 100 ; 25 ; 15 ; produits par les puissances de 10 ; décompositions canoniques des nombres ; etc. ces activités s'articulent autour de nombreux jeux, notamment les jeux de recto verso qui permettent aux élèves de s'entraîner tout en leur donnant le moyen de valider immédiatement leur réponse, ce qui est essentiel.

La rapidité n'est pas un objectif primordial du calcul mental automatisé (appelé parfois calcul rapide), mais il est évident que c'est un objectif important dans la mesure où le rappel en mémoire des résultats mémorisés lors d'un calcul ne doit pas faire perdre à l'élève le fil de son calcul.

## **Le calcul instrumenté automatisé**

Toutes les calculatrices ne sont pas programmées de manière analogue et de ce fait ne fonctionnent pas de la même manière. Les élèves doivent apprendre à se servir de manière rapide et efficace et quasi automatisée de la calculatrice dont ils disposent. Ils devront aussi apprendre à contrôler attentivement toutes les étapes des calculs pour détecter les erreurs de frappes possibles.

Au cours du cycle 3 et surtout au collège, les élèves apprendront à se servir de logiciels de calcul, en particulier de tableurs, pour effectuer des calculs de manière automatisée. On voit bien ici qu'il leur sera nécessaire dans un premier temps d'apprendre à « programmer » le calcul que la machine ensuite effectuera automatiquement.