

Partie 1

Enseigner les mathématiques au CM1 Enjeux didactiques et présentation argumentée des progressions



Il m'a paru qu'en général, on ne devrait rien enseigner aux enfants sans leur en avoir expliqué et fait sentir les motifs. Ce principe me semble très essentiel dans l'instruction, mais je le crois surtout fort avantageux en arithmétique et en géométrie. Ainsi des éléments de ces sciences ne doivent pas seulement avoir pour but de mettre les enfants en état d'exécuter sûrement, et facilement par la suite, les calculs dont ils peuvent avoir besoin, mais doivent encore leur tenir lieu d'éléments de logique et servir à développer en eux la faculté d'analyser leurs idées, de raisonner avec justesse.

Condorcet
(1743-1794)

Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité

Nombres

1 Les nombres entiers : deux systèmes de numération

Une grande partie du travail sur la numération a été menée au cycle 2. Au cours des années de CM, il s'agit de consolider les acquis antérieurs des élèves pour leur permettre de développer des stratégies de calcul réfléchi et de comprendre les algorithmes de calcul écrit. Pour cela une très bonne maîtrise de la numération est indispensable.

Il s'agit également en CM, où l'on rencontre un champ numérique plus grand, de mener un travail spécifique sur la numération orale de manière à permettre aux élèves d'en comprendre les règles de fonctionnement qui n'ont été qu'abordées dans les classes antérieures. C'est souvent en effet au moment de la rencontre avec des « grands nombres »

que la non-maitrise par certains élèves des liens entre numération écrite et numération orale devient apparente.

Nos deux systèmes de numération des nombres entiers sont comme deux « langues différentes », l'une verbale appelée souvent numération orale mais qui peut se trouver sous forme écrite en lettres, l'autre, en chiffres, appelée numération écrite. Il ne suffit pas de proposer des dictées ou des lectures de nombres pour aider les élèves à dépasser leurs éventuelles difficultés. Le tableau ci-dessous permet de mettre en évidence les ressemblances et les différences entre nos deux systèmes de désignation des nombres.

	Numération écrite	Numération orale
Valeur(s) des groupements	Groupements uniquement par dix	Groupements par dix, mais aussi des groupements auxiliaires par mille, million, etc. Et même par 20 dans le cas de quatre-vingt.
Symboles	Dix symboles exactement : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0	Une grande quantité de mots, que nous appelons souvent « mots-nombres » : – neuf mots qui correspondent à la lecture des chiffres : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ; – des mots qui correspondent aux différentes puissances de la base : dix, cent, mille, million, etc. ; – cinq mots pour certains multiples de 10 (certaines dizaines) : vingt, trente, quarante, cinquante, soixante ; – six mots « anomalies » onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize ; – le mot zéro qui ne sert qu'à se désigner lui-même mais qui n'entre dans la composition d'aucun autre nom de nombre.
Nécessité d'un zéro	Oui, le zéro marque l'absence de groupements d'un certain rang	Non
Règles de combinaison	C'est la position du chiffre dans le nombre qui indique de quelle puissance de dix il est le coefficient. La juxtaposition des symboles chiffres n'a donc pas une valeur opératoire. 4 708 4 mille 7 centaines 0 dizaine 8 unités	La juxtaposition des « mots-nombres » a toujours une valeur opératoire. Plusieurs règles permettent de trouver le nombre : – par addition dix-huit $10 + 8$ soixante-dix $60 + 10$ – par multiplication trois-mille $3 \times 1\ 000$ quatre-vingts 4×20 – par addition et multiplication quatre-vingt-dix $(4 \times 20) + 10$ six-mille-sept-cent-quarante-sept $(6 \times 1\ 000) + (7 \times 100) + 40 + 7$ – encore plus complexe deux-cent-vingt-sept-mille-cinq-cent-huit $[(2 \times 100) + 20 + 7] \times 1\ 000 + [5 \times 100] + 8$ trois-cent-soixante-quatorze-millions $[(3 \times 100) + 60 + 14] \times 1\ 000\ 000$
Type de numération	Numération de position	Numération hybride

Les différences structurelles entre les deux numérations nécessitent des apprentissages spécifiques pour que les élèves puissent comprendre et s'approprier leur fonctionnement. La calculatrice peut être une aide pour prendre conscience du fait que la valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans l'écriture chiffrée d'un nombre. Ainsi afficher un nombre puis sans l'effacer changer un chiffre en un autre permet de travailler cet aspect : pour transformer 657 et 687, il faut ajouter 3 dizaines c'est à dire 30 et non 3.

Le début du CM1 est consacré (étape 3) à une révision sur la numération écrite et numération orale pour les nombres jusqu'à 9 999.

Les étapes 5 (clé) et 6, en étendant le champ numérique jusqu'à 999 999, permettent de revisiter le principe de groupements successifs par dix, et d'introduire la surbase « mille » qui structure la suite des nombres en « classes » (classe des mille, classe des unités simples et plus tard (étape 96) classe des millions).

1 Roméo et Alice jouent avec un jeu de cartes étrange : il y a des cartes nombres et une carte « mille ».

Le jeu consiste à construire des noms de nombres en juxtaposant 3 cartes. La carte « mille » doit toujours être utilisée.

quatre-cent-trente-huit-mille-trente-sept

trente-sept-mille-quatre-cent-trente-huit

a Écris en chiffres les nombres trouvés par Alice et Roméo.

b Construis 5 nombres avec les cartes du jeu, écris-les en lettres et en chiffres.

Étape 5 Les nombres jusqu'à 999 999

2 Les nombres entiers et la droite graduée

Rappelons que la droite graduée fait le lien entre le cadre numérique et le cadre géométrique. Cette représentation aide les élèves à se construire une ligne mentale des nombres, utile lors d'activités de comparaison et d'encadrement, pour comprendre certains procédés de calcul (sauts sur la droite pour l'addition et la soustraction, conservation des écarts, encadrement d'un nombre par deux multiples consécutifs d'un autre) et indispensable pour la compréhension des échelles de graduations des axes d'un graphique cartésien.

L'étude de la droite graduée, initiée au cycle 2, est reprise : les élèves représentent les nombres entiers sur une droite munie d'une graduation, c'est à dire d'un point origine et d'une unité. Chaque nombre est représenté par un point M de la droite (sa position) et

Le travail approfondi sur les différentes unités de numération et leur lien conduit les élèves à maîtriser différentes décompositions des nombres et à résoudre sans calcul certains problèmes de division (par exemple combien de carnets de 10 timbres sont nécessaires pour affranchir 1 540 lettres).

1 Zora et Roméo jouent au jeu des échanges « 10 contre 1 ».

Complète le tableau qui donne la valeur des différents jetons.

.....	100	1
une centaine de mille	une dizaine de mille	une unité de mille	une centaine	une dizaine	une unité

10 jetons valent un jeton
 10 jetons valent un jeton
 10 jetons valent un jeton
 10 jetons valent un jeton
 10 jetons valent un jeton

Étape 21 L'étude de la numération orale

Pour aider les élèves à comprendre le fonctionnement de la numération orale, un jeu d'assemblage de mots-nombres permet de lier le nom du nombre et sa « décomposition auditive », correspondant à ce que l'on entend quand le nombre est dit, décomposition qui met en évidence la valeur opératoire des juxtapositions des mots-nombres et qui permet de faire le lien avec l'écriture chiffrée du nombre.

Exemple : trois-mille-cinq-cent-quatre-vingt-seize :
 $(3 \times 1\,000) + (5 \times 100) + (4 \times 20) + 16$
 $= 3\,000 + 500 + 80 + 16$
 $= 3\,596$

correspond à la distance du point M à l'origine O mesurée avec l'unité de la graduation. La distance entre deux graduations consécutives est constante. Le nombre de graduations entre deux points représente la différence entre les deux nombres auxquels ils correspondent.

1

Complète : « Cette portion de droite est graduée de ... en ... »
 Reproduis cette droite graduée et place le nombre 26 000.

Mon nombre est à égale distance de 25 100 et de 26 700.

Le mien est sur un trait de graduation, il est entre 25 200 et 26 200, son chiffre des centaines est 5.

Trouve le nombre de Zora et celui de Lucas.
 Place-les sur la droite graduée.

Étape 10 Les nombres sur la droite numérique

À l'étape 10, ce travail est prolongé pour les grands nombres : les élèves apprennent à repérer l'échelle de graduation, à placer ces grands nombres exactement ou approximativement sur des droites graduées de 100 en 100, de 1 000 en 1 000, de 10 000 en 10 000, à identifier des nombres à partir de leur position sur la droite.

3 Les nombres décimaux

Les nombres décimaux ont longtemps été enseignés comme résultant du codage d'une mesure par un changement d'unité : on pensait avoir introduit de façon satisfaisante les nombres décimaux quand on déclarait que 1 324 cm pouvait aussi s'écrire 13,24 mètres. Mais en faisant l'économie de l'étude préalable du fractionnement de l'unité, on mettait de côté **le fait que le nombre décimal est la réponse à une question, celle de l'insuffisance des nombres entiers pour effectuer des mesures précises.**

Les nombres décimaux permettent en effet d'approcher la mesure d'une grandeur continue. Ils sont construits de telle sorte qu'ils permettent des fractionnements de l'unité de plus en plus fins. Ils sont donc une infinité à être aussi près qu'on le souhaite d'une mesure donnée : par exemple, si l'on plie une bande unité en trois parties superposées, les nombres 0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,333 3 approchent la mesure d'une des parties sans jamais l'égaliser. Pour l'artisan ou le technicien, ces nombres sont un outil suffisant car à chaque technique correspond une précision spécifique de la mesure : le charpentier travaillera au $1/100^{\text{e}}$ de mètre près ; l'usinage d'un moteur s'effectuera au $1/1\,000\,000^{\text{e}}$ de mètre près pour certaines pièces. Sans exiger une maîtrise complète de la part des élèves de ce que les mathématiciens nomment la densité des décimaux sur la droite réelle, il est nécessaire de mettre en évidence cette véritable rupture que constituent ces nombres par rapport aux nombres entiers.

La construction de fractions simples est justifiée par le fait qu'elle aide efficacement à la compréhension des nombres décimaux. De quelles fractions les élèves ont-ils besoin pour élaborer cette compréhens-

a. Fractionnements de l'unité

Les fractions se rencontrent dans les pratiques quotidiennes. L'étape 65 permet de faire vivre les fractions $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ dans des situations familières (heure, partage d'une tarte, d'une bande de papier). Attention, cela ne constitue pas une introduction des

Ils apprennent ensuite (étape 25) à graduer une droite avec les multiples d'un nombre pour enrichir la notion de multiples et comprendre que tout nombre peut être situé entre deux multiples consécutifs d'un autre, **ce qui prépare l'étude de la division euclidienne.**

sion correcte ? Les fractions de l'unité ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ...) sont au départ suffisantes. Les autres fractions s'en déduisent : $\frac{3}{4}$ est conçu comme 3 fois $\frac{1}{4}$, $\frac{14}{10}$ comme 14 fois $\frac{1}{10}$.

Les fractions prennent leurs statuts de « nombres » dès lors qu'elles se placent sur la droite numérique et qu'on peut effectuer des calculs avec elles.

Les fractions décimales, de dénominateur 10, 100, 1 000..., ont le grand avantage d'être facilement localisables sur la droite numérique par simple lecture ($\frac{21}{10}$ c'est $2 + \frac{1}{10}$ donc $\frac{21}{10}$ est entre 2 et 3). Le passage à l'écriture à virgule n'est qu'une convention facilitée par un entraînement préalable à l'écriture canonique d'une fraction décimale ($\frac{42}{10}$ c'est $4 + \frac{2}{10}$ donc 4,2). La comparaison et l'addition des nombres décimaux sont d'autant plus faciles à aborder que la construction de ceux-ci s'est effectuée rigoureusement avec les écritures fractionnaires décimales.

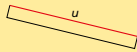
La construction de ces nouveaux nombres nécessite donc une suite d'étapes bien structurée. Pour éviter une dilution des apprentissages et permettre une clarification des intentions pédagogiques, deux « blocs d'étapes » sont proposés dans lesquels sont aussi abordés des aspects géométriques en lien avec la mesure (fractions et longueurs, fractionnement à l'aide d'un réseau de droites parallèles équidistantes, étude de la droite numérique, fractions et aires) qui permettent de ne pas rester dans le cadre strictement numérique.


fractions au sens mathématique du terme, cela permet simplement aux élèves de dire ce qu'ils « savent » sur ces objets.

L'étape 66 (clé) a pour but de mettre en évidence l'insuffisance des nombres entiers pour donner la

mesure d'une longueur. Un partage simple d'une unité de longueur par pliage dans une situation de communication est la solution au problème posé aux élèves. Cette situation permet la production de messages du type : « Le segment mesure une unité plus la moitié de l'unité » ou bien « c'est $1\text{ u} + \frac{1}{2}$ de u ».

1 Pour mesurer la longueur d'un segment, Zora s'est servie du segment u qu'elle a pris pour unité. Elle a reporté une fois l'unité u , puis la moitié de u , et enfin le quart de u .
Elle a écrit : $1\text{ u} + \frac{1}{2}\text{ u} + \frac{1}{4}\text{ u}$

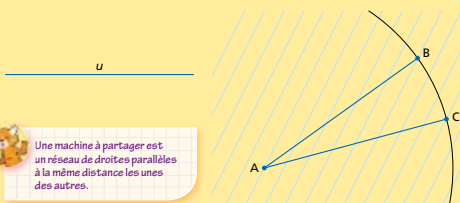



 Pour avoir la moitié de l'unité u , je plie la bande en deux. Pour avoir le quart, je plie à nouveau en deux.

Étape 66 Fraction et partage de longueurs

À l'étape 68 (clé), le dispositif de réseau de droites parallèles et équidistantes (la machine à partager) va permettre de construire un ensemble de fractions plus riche que lors de l'étape précédente. **Rapidement, afin de préparer l'introduction des nombres décimaux, les élèves sont incités au cours de cette étape à effectuer des partages en dixièmes** (fractions exprimant un partage en 10 segments de même longueur).

1




 Une machine à partager est un réseau de droites parallèles à la même distance les unes des autres.

a En traçant un cercle de centre A et de rayon u sur ta machine à partager, tu peux obtenir le partage du segment unité en parts égales. En combien de parts le segment [AB] est-il partagé ? En combien de parts les segments [AC] est-il partagé ?

b Construis une bande de même longueur que le segment unité u . Choisis le bon rayon pour partager le segment u en 10 parts égales.

c Trace les segments suivants :
[GH] : $\frac{1}{10}\text{ u}$ [IJ] : $\frac{5}{10}\text{ u}$ [KL] : $\frac{6}{10}\text{ u}$ [MN] : $\frac{16}{10}\text{ u}$

 $\frac{1}{10}$ se lit « un dixième ». Attention ! Ce n'est pas « une dizaine » !

Étape 68 Partager l'unité en dixièmes

Pour que les fractions acquièrent leur statut de nombres, l'étape 70 montre que **les fractions sont des nombres qui permettent de coder la position de différents points sur la droite numérique graduée**. Cette position correspond à la distance de l'origine de la droite au point considéré mesurée avec l'unité de la graduation. De plus, en tant que nombres, les


b. Introduction des écritures à virgule

Au cours de l'étape 81 les élèves étudient l'addition des dixièmes, des centièmes, puis de deux fractions décimales.

L'étape 82 présente la convention d'écriture des fractions décimales à partir de leur écriture canonique.

$$\frac{247}{100} = 2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} = 2,47$$

fractions s'additionnent, se comparent et sont liées aux entiers naturels.

 $\frac{3}{10}$ désigne la position du point B sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AB.
 $\frac{7}{10}$ désigne la position du point C sur la droite graduée. C'est aussi la distance en unités u de AC.

Étape 50 Fractions et graduations

L'étape 74 introduit un changement de contexte. Les fractions permettent également d'exprimer des mesures d'aire.

Il est temps de mettre en évidence les avantages des fractions décimales. Le but de l'étape 76 est de **distinquer les fractions décimales pour leur facilité d'utilisation** quand il s'agit de les comparer aux nombres entiers ou de les placer sur la droite numérique.

- 2** a. Tu dois encadrer les nombres écrits sur les étiquettes par deux entiers consécutifs. Tu as le choix entre les nombres de la boîte jaune ou les nombres de la boîte bleue. Quelle boîte chois-tu ? **Effectue** les encadrements des nombres de la boîte que tu as choisie.


C'est plus facile de trouver la partie entière quand la fraction a un dénominateur égal à 10.

 La partie entière d'une fraction peut être 0.



Étape 76 Les avantages des fractions décimales

Les différentes écritures des fractions décimales de dénominateur 10 et 100 sont étudiées à l'étape 77. C'est à cette étape que l'écriture dite « canonique » est instituée. Elle permet de mettre en évidence les nouvelles unités de numération décimales : les dixièmes et les centièmes.

 $2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}$ est l'écriture canonique de la fraction $\frac{247}{100}$.

Étape 77 L'écriture canonique d'une fraction décimale

Un rappel historique permet de mieux comprendre son intérêt et son caractère conventionnel.

1 a Stevin de Bruges (1548-1620) a proposé l'écriture des fractions décimales sous la forme de nombres à virgule. Pour cela, il a utilisé la forme canonique des fractions.



C'est ainsi que les nombres décimaux sont nés !
L'écriture à virgule (appelée aussi écriture décimale) 3,52 se lit « trois virgule 5 dixièmes 2 centièmes ».

b Complète le tableau.

Fraction décimale	Écriture canonique	Écriture à virgule
$\frac{27}{10}$	$2 + \frac{7}{10}$	2,7
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0,3
$\frac{352}{100}$	$3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}$	3,52
$\frac{45}{10}$		
$\frac{175}{100}$		



Stevin de Bruges.

Étape 82 Les écritures à virgules

Les écritures à virgule permettent d'étendre facilement les algorithmes de calcul des entiers. Mais en ce qui concerne la comparaison, elles peuvent

représenter un obstacle. En effet le rangement de la partie décimale des nombres décimaux est de même type que l'ordre lexicographique : exemple, $0,05 < 0,1 < 0,12 < 0,2 < 0,21 < 0,5$; ce qui est en rupture avec la comparaison des nombres entiers. Cette question est délicate et source d'erreurs nombreuses pour les élèves qui ont tendance à considérer les écritures à virgule comme des couples d'entiers. Nous y consacrons l'**étape 86**.

Enfin, nous présentons l'**intérêt des nombres décimaux dans le domaine de la mesure des grandeurs** et des conversions d'unités à l'**étape 90** (longueurs) et à l'**étape 94** (masse).

Calculs

1. Les problèmes arithmétiques et l'apprentissage du sens des opérations

L'avancée du travail sur les problèmes et sur les procédés de calcul doit être simultanée : sans mise en perspective dans un problème, le sens d'une opération ne peut pas se construire. Mais sans recherche de stratégies optimales de calcul pour le résoudre, le travail sur le problème ne peut aboutir à la construction de procédés de calculs plus élaborés.

Dans la résolution d'un problème le type de raisonnement à construire par les élèves dépend de nombreux facteurs intervenant de façon croisée. Parmi eux, deux sont essentiels : la structure du problème et la nature des données numériques (nombres entiers ou décimaux, taille des nombres, valeur des écarts, éventuelles particularités des écritures), même si les autres (tels le contexte, les modes de présentation et de formulation du texte) ont aussi leur importance.

a. Les problèmes d'addition et de soustraction

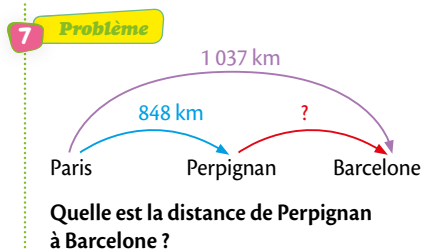
En croisant les relations mathématiques en jeu dans les problèmes additifs et les modes de raisonnement mis en œuvre par les élèves pour les résoudre, G. Vergnaud a proposé une typologie sur laquelle nous nous appuyons.

1. Différentes structures additives

Les problèmes rencontrés à l'école primaire relèvent essentiellement des familles que nous rappelons brièvement ci-dessous.

» Composition de deux mesures

Dans cette famille, on trouve essentiellement des problèmes de réunion ou de fractionnement de collections ou de grandeurs mesurables. Suivant que l'on cherche le tout ou l'une des parties, l'opération experte associée est une addition ou une soustraction.



Étape 13 La soustraction, Exercice 7

On connaît le tout, c'est la distance entre Paris et Barcelone (1 037 km), et une partie, la distance entre Paris et Perpignan (848 km). La question porte sur la recherche de l'autre partie, la distance entre Perpignan et Barcelone.

› Transformation d'états (ou de positions)

Il s'agit d'énoncés qui décrivent des situations se déroulant souvent dans le temps, dans lesquelles on peut identifier un état initial, une transformation (positive ou négative) opérant sur cet état pour conduire à un état final. Cette structure permet de définir six catégories de problèmes suivant que la transformation est positive ou négative et que la recherche porte sur l'état final, la transformation ou l'état initial.

3 Procède comme dans l'exercice 1.

1^{er} problème

Alexandre fait 965 km en voiture.
Son compteur marque alors 23 230 km.
Que marquait son compteur au départ ?

Étape 31 Problèmes Exercice 3, 1^{er} problème

On connaît l'état final (23 230 km), on connaît la transformation (+ 965 km), la question porte sur l'état initial (le nombre de kilomètres affiché au compteur au départ).

› Comparaison d'états

Deux états relatifs à des grandeurs sont comparés par les locutions « de plus », « de moins ». L'un joue le rôle de référent pour l'autre (le référé). Dans cette famille, on trouve également six sous-catégories suivant que la relation est positive ou négative et que la question porte sur la recherche du référé, de la comparaison ou du référent.

Exemple page 9 : « Tom a 16 ans. Paul a 8 ans de plus que Tom. Quel âge a Paul ? »

Le référent est connu (16 ans), la relation de comparaison aussi (+ 8). La question porte sur le référé (l'âge de Paul).

Exemple page 48 (résolution de problèmes en calcul mental) dans lequel une relation négative engage une addition :

« Jules a maintenant 19 billes, après en avoir perdu 11. Combien de billes avait-il au début du jeu ? »

› Compositions de transformations

Parmi les autres structures, on trouve les compositions de transformations : deux transformations ou plus sont appliquées successivement à des états qui ne sont pas connus. La question porte alors sur la transformation unique composée de ces transformations.

2. La progression suivie dans Opération Maths CM1

Ce qui caractérise le CM1 du point de vue du travail sur l'addition et la soustraction c'est :

– l'extension des problèmes, et par suite des techniques, à un champ numérique plus grand dans les nombres entiers et à un champ numérique nouveau, celui des nombres décimaux ;

– l'enrichissement des situations proposées : dans le cas de transformation d'états, les recherches d'états initiaux sont plus fréquentes (que la transformation soit positive ou négative). Des problèmes de compositions de transformations, sans connaître la valeur de l'état initial, peuvent être proposés. Pour les résoudre les élèves utilisent souvent un état initial hypothétique qui leur permet de trouver la réponse ;

– l'enrichissement des formes langagières des énoncés (syntaxe, vocabulaire, temps, et organisation énonciative) ;

– la variété des contextes qui, de plus en plus, font référence à d'autres champs disciplinaires (géographie, sciences...).

Les compétences des élèves (et des adultes) dans la résolution de problèmes d'addition et de soustraction reposent sur leur conceptualisation des relations de bases.

La première étape permet à l'enseignant de faire le point sur les compétences des élèves à résoudre différents types de problèmes additifs et soustractifs. Les nombres choisis sont du domaine familier, ils permettent aux élèves d'engager aisément des procédures de calcul réfléchi. Les problèmes relèvent des trois relations sémantiques : composition de mesures (relation partie-partie tout), transformation d'états et comparaison d'états.

À l'étape 15, les nombres ne sont plus du domaine familier. Le but est de permettre aux élèves de mettre en oeuvre des techniques opératoires revues aux étapes précédentes. C'est aussi l'occasion pour l'enseignant de mettre en évidence l'équivalence entre l'addition à trou et la soustraction.

Tout au long des autres périodes les élèves ont à utiliser l'addition et la soustraction dans divers problèmes.

L'extension de l'addition et de la soustraction aux nombres décimaux fait l'objet de l'étape 85 et de l'étape 87. Elle est assurée par un retour aux écritures canoniques des fractions décimales qui permet de comprendre les techniques posées usuelles.

En conclusion, au CM1 les élèves vont identifier l'opération arithmétique et cela sans se référer à une quelconque simulation de l'action. Le but est de prendre

conscience de l'indépendance des procédures de calcul par rapport au contexte du problème.

Une exigence de formalisation des solutions (reconnaissance du calcul à effectuer et production de l'écriture mathématique correspondante) est alors un objectif à atteindre.

b. Les problèmes de multiplication et de division

De même que l'expression « structures additives » fait référence aux situations dont le traitement appelle une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations, l'expression « structures multiplicatives » renvoie aux situations dont le traitement appelle une multiplication, une division ou une combinaison de telles opérations. Rappelons différentes structures mises en évidence par G. Vergnaud.

1. Différentes structures multiplicatives

À l'école élémentaire, les problèmes de ce champ relèvent essentiellement des structures suivantes.

› Comparaison multiplicative

Deux états relatifs à une grandeur sont comparés par les locutions « fois plus », « fois moins ». L'un joue le rôle de référent pour l'autre (le référé). Dans cette famille, on trouve six sous-catégories suivant que la comparaison est positive ou négative et que la question porte sur la recherche du référé, de la comparaison ou du référent.

« Zoé a 18 voitures, Rémi en a 3 fois plus. Combien de voitures a Rémi ? »

Étape 26 Je revois ce que j'ai appris, exercice 10

› Relation de proportion simple et directe entre deux grandeurs

Ces problèmes se caractérisent par le fait qu'ils font intervenir trois valeurs numériques pour en trouver une quatrième.

On peut distinguer deux cas.

– Dans le premier cas, l'une des valeurs numériques correspond à l'unité d'une des grandeurs (cf. prix unitaire dans l'exemple ci-dessous). Les quatre valeurs sont : unité, prix unitaire, quantité, prix total.

Matériel	Prix en €	Quantité	Prix total en €
Table d'entraînement	125	4	...
Table de compétition	...	4	2 000
Panneau de séparation	70	16	...
Tee-shirt	...	15	...
Short	...	10	160
Total			3 930

« Le club de tennis de table doit compléter son équipement. Voici le bon de commande. Recopie ce bon et complète-le. »

Étape 22 Problèmes, exercice 2

Les calculs du prix total des tables d'entraînement et des panneaux de séparation relèvent d'un problème de multiplication. Le calcul du nombre de tables de compétitions et de shorts relève d'un problème de division. Le calcul du nombre de tee-shirt relèvera aussi d'un problème de division après calcul du prix total des tee-shirts.

Les contextes utilisés peuvent être un contexte ordinal (sauts réguliers sur une piste graduée, évocation du comptage de n en n), un contexte cardinal (évocation d'objets isolés), un contexte de mesure de grandeur continue (des longueurs, des masses, des contenances).

– Dans le second cas, aucune des trois valeurs numériques ne correspond à l'unité d'une des grandeurs.



Étape 61 La proportionnalité au quotidien

Les élèves mettent en œuvre plus facilement des procédures s'appuyant sur les propriétés dites de linéarité que des procédures de recherche du coefficient de proportionnalité, mais cela dépend des nombres choisis.

› Proportion double

Il s'agit d'une relation de proportionnalité d'une variable par rapport à deux autres indépendantes entre elles.

Le dénombrement d'objets disposés selon des configurations rectangulaires relève de cette structure.

On a dans ce cas deux sous-catégories de problèmes.

– Des problèmes qui relèvent de la multiplication.

« Une salle de spectacle contient 17 rangées de 20 fauteuils. Combien de spectateurs peuvent s'asseoir ? »

Étape 27 problème 10

– Des problèmes qui relèvent de la multiplication à trou ou de la division.

« Un quadrillage est dessiné sur du papier quadrillé. Il a 160 cases et 8 colonnes. Combien de lignes a-t-il ? »

Étape 45 problème 9

2. Cas de la division euclidienne

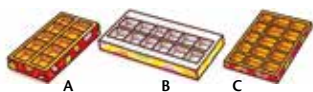
Les problèmes conduisant à la division euclidienne relèvent généralement de la catégorie proportionnalité simple dans des situations de distributions, de répartitions en parts égales, de groupements. Ils renvoient à deux grandes familles :

– la recherche du nombre de parts ;

3 Un paquet contient 252 bonbons.
On veut donner 15 bonbons à chaque enfant.
Il y a 25 enfants. Est-ce possible ?

Étape 41 La division, Chercher un nombre de parts

– la recherche de la valeur d'une part.



Étape 42 La division, Chercher la valeur d'une part

Ces deux types de problèmes ne sont pas appréhendés avec la même facilité par les élèves. Notre objectif est de leur faire prendre conscience qu'il s'agit dans les deux cas de problèmes de division, qu'ils relèvent des mêmes procédures de calcul, et qu'ils peuvent être décrit par une écriture en ligne qui caractérise la division euclidienne.

Dans ces problèmes, en fonction du contexte, la réponse attendue peut être le quotient, le quotient + 1 (quotient par excès), le reste, éventuellement le complément du reste au diviseur.

« Élise répartit équitablement 312 dragées dans des boîtes de 16 dragées. Elle remplit le maximum de boîtes. Elle mangera les dragées qui resteront. Combien de dragées mangera-t-elle ? »

Étape 41 La division, Chercher un nombre de parts, problème où l'on s'intéresse au reste.

2. L'apprentissage des techniques opératoires

Certaines personnes voient dans l'acquisition et la maîtrise des techniques de calcul posées le but ultime de l'enseignement mathématique de l'école primaire.

Il est important de rappeler que la maîtrise d'une technique de calcul ne garantit pas la maîtrise de l'opération associée, c'est-à-dire la reconnaissance des situations dans lesquelles celle-ci est pertinente.

De même, ne pas connaître un algorithme ne signifie pas nécessairement ne pas comprendre l'opération.

Mais l'apprentissage de l'algorithme de calcul, s'il ne peut être confondu avec le travail de construction du sens de l'opération associée, peut cependant y contribuer.

Précisons rapidement ce qu'on appelle « technique de calcul posée » ou encore « algorithme de calcul ».

Il s'agit d'un procédé qui est caractérisé par le fait qu'il se déroule de manière identique quelles que soient les valeurs numériques auxquelles on l'applique.

Les algorithmes de calcul sont « conventionnels », ils varient suivant les époques et les cultures (on n'effectue pas les divisions de la même manière en France, en Angleterre ou en Espagne, la technique française actuelle est très différente de celle utilisée en France au XVII^e siècle). Pour être intéressant, un algorithme de calcul doit être relativement **économique**, il doit être **fiable** et assez **facile à retenir**. Il faut distinguer la phase de construction de l'algorithme, de son utilisation ultérieure. En effet, une fois maîtrisé, il peut être appliqué de manière « semi-automatique » par la mise en œuvre de conduites invariantes, ce qui assure d'une part un certain gage de réussite à l'opération et d'autre part une certaine rapidité.

Les techniques usuelles de l'addition en colonne (étape 7) de la soustraction en colonne (étape 13), de la multiplication posée (étape 29), de la division en utilisant la « potence » (étapes 45 et 46) pour les nombres entiers, puis de l'addition (étape 85) et de la soustraction (étape 87) des nombres décimaux sont ainsi des algorithmes de calcul qui sont enseignés à

l'école et qui doivent être appris et retenus par les élèves.

Leur mise en oeuvre nécessite une **très bonne maîtrise de la numération décimale de position**, ainsi qu'une **très bonne connaissance de nombreux**

« faits numériques », tels que les résultats des tables d'addition et de multiplication, mais aussi la liste des multiples de certains nombres : 10 ; 100 ; 25 ; 15 ; produits par les puissances de 10 ; les décompositions canoniques des nombres ; etc.

a. La progression suivie dans opération maths CM1

1. L'addition et la soustraction

Les techniques de calcul de l'addition et de la soustraction sont convoquées dans celles de la multiplication et de la division. Dès le début de l'année, leur maîtrise est donc un objectif majeur. La technique de l'addition, en principe acquise, est revue rapidement (étapes 2 et 7). Celle de la soustraction est retravaillée : à l'étape 11, un retour sur la propriété des conservations des écarts permet de remplacer une soustraction par exemple $92 - 57$ par une soustraction équivalente mais plus simple à calculer $95 - 60$ et d'obtenir le résultat 35 par un calcul mental réfléchi.

1 a Avec sa règle graduée en mm, Roméo mesure la longueur de la bande verte. Quelle est la longueur, en millimètres, de cette bande ?

L'écart entre 57 et 92 représente la longueur de la bande verte. Calculer cet écart c'est calculer la différence entre 92 et 57. Complète l'égalité $92 - 57 = \dots 00$

b Pour mesurer plus facilement la longueur de la bande, Lucas la fait glisser le long de sa règle. Il place l'extrémité sous la graduation 60.

À quelle graduation la bande arrive-t-elle après avoir glissé ? L'écart entre 60 et 95 c'est aussi la longueur de la bande.

c Complète l'égalité $92 - 57 = \dots$

Je résume ! L'écart entre 57 et 92 ne change pas quand on ajoute un même nombre aux deux nombres. J'ajoute 3.

Étape 11 La soustraction

Ce procédé est stabilisé sous forme de schémas fléchés qui mettent en évidence l'invariance de la différence quand on ajoute un même nombre aux deux termes.

Pour calculer $1\,438 - 1\,152$: J'ajoute 8 aux deux nombres, puis j'ajoute encore 40.

Étape 11 La soustraction

L'étape 13 permet de passer à la présentation usuelle en colonne tout en maintenant l'approche par conservation des écarts. Dans le cas de la technique usuelle, la plus répandue en France, ce que l'on nomme habituellement la "retenue" est une forme automatisée d'application de la propriété de la conservation des écarts. En effet, en ajoutant simultanément 10 unités

d'un certain ordre pour rendre possible la soustraction et 1 unité de l'ordre immédiatement supérieur, on conserve l'écart entre les deux nombres.

1 a Calcule $3\,759 - 486$. Vérifie ton calcul en additionnant 486 et ton résultat.

b Compare ta méthode avec la technique classique.

La différence ne change pas quand on ajoute le même nombre à 3 759 et à 486 (10 dizaines à l'un et 1 centaine à l'autre).

1
$$\begin{array}{r} 3\,759 \\ - 486 \\ \hline \end{array}$$
 5 d moins 8 d, ce n'est pas possible. 9 u moins 6 u égalent 3 u.

2
$$\begin{array}{r} 3\,759 \\ - 486 \\ \hline 3\,273 \end{array}$$
 on ajoute 10 d à 3 759. 15 d moins 8 d égalent 7 d. on ajoute 1 c à 486 pour garder le même écart.

3
$$\begin{array}{r} 3\,759 \\ - 486 \\ \hline 3\,273 \end{array}$$
 7 c moins 5 c égalent 2 c.

4
$$\begin{array}{r} 3\,759 \\ - 486 \\ \hline 3\,273 \end{array}$$
 3 unités de mille moins 0 unité de mille égalent 3 unités de mille.

Enfinement, on écrit : $3\,759 - 486 = 3\,273$

Étape 13 La soustraction, technique usuelle

Ces techniques posées sont étendues à l'addition et à la soustraction des nombres décimaux. L'étape 85 (clé) pose la question : est-on capable de prévoir la mesure d'une bande obtenue par mise bout à bout de deux bandes dont on connaît les longueurs (1,45 m et 2,7 m) ? Avec leurs connaissances sur les fractions décimales, en s'appuyant sur l'écriture canonique, les élèves sont sensés être capables de prévoir par le calcul la longueur de la bande. Une mise en situation est toutefois nécessaire. Il en sera de même pour la soustraction (étape 87). Cette étape aboutira à un procédé automatique de calcul.

1 a En mettant bout à bout une bande de carton de longueur 1,6 m et une deuxième bande, Alice obtient une bande de longueur 2,34 m. Trouve la longueur de la deuxième bande.

b

$2,34 - 1,6$ c'est comme $2,74 - 2$. Le calcul devient facile.

$$\begin{array}{r} 2,34 \\ - 1,6 \\ \hline 0,74 \end{array}$$

Termine le calcul de Zora.

$$\begin{array}{r} 2,34 \\ - 1,6 \\ \hline 0,74 \end{array}$$

Étape 87 Les nombres décimaux

2. La multiplication

Avant de revoir une technique de la multiplication il est nécessaire de reprendre un travail sur le **répertoire multiplicatif**, sur la **notion de multiple** et sur la **règle de multiplication par 10, par 100...**

Le répertoire multiplicatif est pris comme objet d'étude à l'**étape 23**. Au cours de l'**étape 25**, les élèves se familiarisent avec les multiples de 5 puis de 9 puis de 12, en les plaçant sur la droite numérique.

1 Cette droite est graduée de 5 en 5.

a Place sur cette droite 5×14 , et complète $5 \times 14 = \dots$. Écris le nombre sur la droite.

b Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 5 ? Place-les sur la droite.

10 16 25 40 46 57 65

Étape 25 Les multiples d'un nombre

Ce contexte a pour but de favoriser les représentations de la notion de multiples (les sauts réguliers sur la droite) et de multiples communs. À l'**étape 27**, les élèves revoient la règle de multiplication par 10, 100, 1 000 et leurs multiples toujours en s'appuyant sur une représentation à l'aide de la droite numérique.

La révision de l'algorithme traditionnel de la multiplication (**étape 29**) s'appuie sur l'explicitation de la technique usuelle en effectuant un détour par la **multiplication posée où tous les calculs intermédiaires sont écrits**. Cette présentation transitoire permet de redonner du sens au calcul du produit de deux nombres en s'appuyant sur la numération et les produits par 10, par 100 et leurs multiples. Ce procédé peut être d'une grande aide pour des élèves ayant encore des difficultés avec la multiplication posée. Puis les élèves apprennent à ne plus écrire les calculs intermédiaires et leur somme, mais à les traiter mentalement, ce qui les oblige à mémoriser les retenues éventuelles des produits partiels, puis les retenues dans le calcul de la somme des produits partiels.

b Dans la technique habituelle en colonne, à quels calculs correspondent les nombres 1 758 et 41 020 ? Termine le calcul.

$$\begin{array}{r} 586 \\ \times 73 \\ \hline 1758 \\ 41020 \\ \hline \end{array}$$

c À l'aide de la question b, vérifie tes calculs de la question a.

d Complète la méthode de Zora.

$$\begin{array}{r} 586 \\ \times 73 \\ \hline \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Pour ne pas garder les retenues dans ma tête, j'écris tous les produits pas à pas.

← 3×6
← 3×80
← 3×500
← 70×6
← 70×80
← 70×500
← 586×73

Étape 29 La multiplication, technique usuelle

3. La division

Pour continuer le travail de Lucas, reproduis cette droite graduée et place 315 entre deux multiples consécutifs de 24 puis complète $24 \times \dots < 315 < 24 \times \dots$

Complète l'égalité $315 = (24 \times \dots) + \dots$

Étape 41 La division, chercher un nombre de parts

Dans des problèmes de division, l'approche par essais successifs du dividende par des multiples du diviseur s'appuie sur la multiplication qui est familière aux élèves. Ceux-ci disposent des mots pour décrire facilement leur démarche. Cette recherche, au départ aléatoire, s'organise en s'appuyant sur la droite graduée avec les multiples du diviseur. **Il s'agit, pour trouver le quotient, d'encadrer le dividende par deux multiples consécutifs du diviseur (étapes 41 clé et 42)**. Cette méthode en partie graphique permet d'obtenir tout de suite l'égalité qui traduit la division euclidienne.

L'utilisation de soustractions successives apparaît moins souvent spontanément. Elle est plus lourde du point de vue des calculs. Or, cette approche permet de bien construire ce qui sera l'algorithme de la division. Il faut donc proposer des situations qui la favorisent. Par exemple, dans l'activité proposée hors manuel de l'**étape clé 41**, les soustractions répétées constituent un moyen de tenir à jour la comptabilité de ce qui est fait et de ce qui reste à faire lorsque l'on agit effectivement sur des objets.

1 a Un fermier vend les œufs de ses poules sur les marchés. Il les dispose sur des plateaux comme celui-ci. Combien d'œufs le fermier met-il sur ce plateau ?

b Calcule le nombre maximum de plateaux qu'il va remplir avec 315 œufs. Indique s'il reste des œufs et combien.

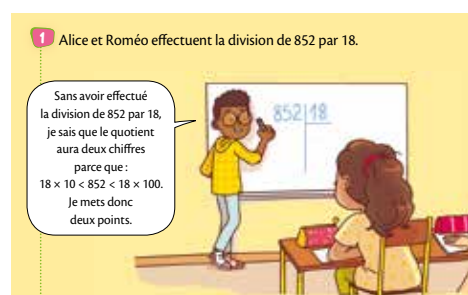
Étape 41 La division, chercher un nombre de parts

Les calculs engagés sont donc envisagés comme des moyens de prévoir des résultats qui seront constatés par une vérification matérielle. Le champ numérique est choisi afin que cette vérification matérielle soit possible. Le but est, à terme, d'engager les élèves dans un travail sur les nombres plutôt que sur les objets et donc, progressivement, de passer d'une preuve matérielle à une preuve par les calculs pour « être sûrs du résultat ».

Au cours de cinq étapes qui s'enchaînent (**étapes 41, 42, 45, 46, 48**), l'enseignant conduit les élèves à repérer, dans des situations de « nombre de parts » et de « valeur d'une part », plusieurs procédés qui apparaissent généralement dans les classes et qui sont étudiés comme tels (**étapes 41 et 42**).

Pour des raisons d'ordre culturel et social et conformément aux programmes, **la disposition retenue est celle de la « potence » avec la pose des soustractions successives**. Elle est tout d'abord étudiée à l'**étape 45** dans le cas d'un diviseur à 1 chiffre, ce qui permet de trouver facilement le nombre de chiffres du quotient et d'utiliser le répertoire mémorisé du diviseur.

Elle est reprise à l'**étape 46 (clé)** avec un diviseur à deux chiffres, ce qui nécessite la construction du répertoire multiplicatif du diviseur.



Étape 46 La division, diviser par un nombre à deux chiffres

3. Les autres formes de calcul

Nous avons décrit dans les paragraphes précédents le rapport dialectique entre construction du sens des opérations et apprentissages de techniques de calcul. Dans ce paragraphe, nous faisons le point sur différents modes de calcul à travailler avec les élèves pour mieux situer le travail sur les techniques opératoires posées dans le vaste champ du calcul.

Commençons par préciser les expressions : calcul mental, calcul réfléchi ou raisonné, calcul automatisé, calcul instrumenté et leurs liens.

Si nous nous intéressons au fonctionnement cognitif convoqué, nous trouvons deux grandes manières de calculer :

- le calcul réfléchi - on dit aussi raisonné - qui nécessite un travail cognitif spécifique : analyse des données, recherches de stratégies adaptées à ces données, mise en œuvre de ces stratégies et contrôle des étapes et du résultat ;

À l'**étape 48**, la **condition sur le reste d'être inférieur au diviseur** est mise en évidence lors de l'étude de l'écriture en ligne de la division euclidienne. Cette écriture est alors utilisée pour résoudre de nombreux problèmes et servira par la suite à vérifier l'exactitude des calculs posés.

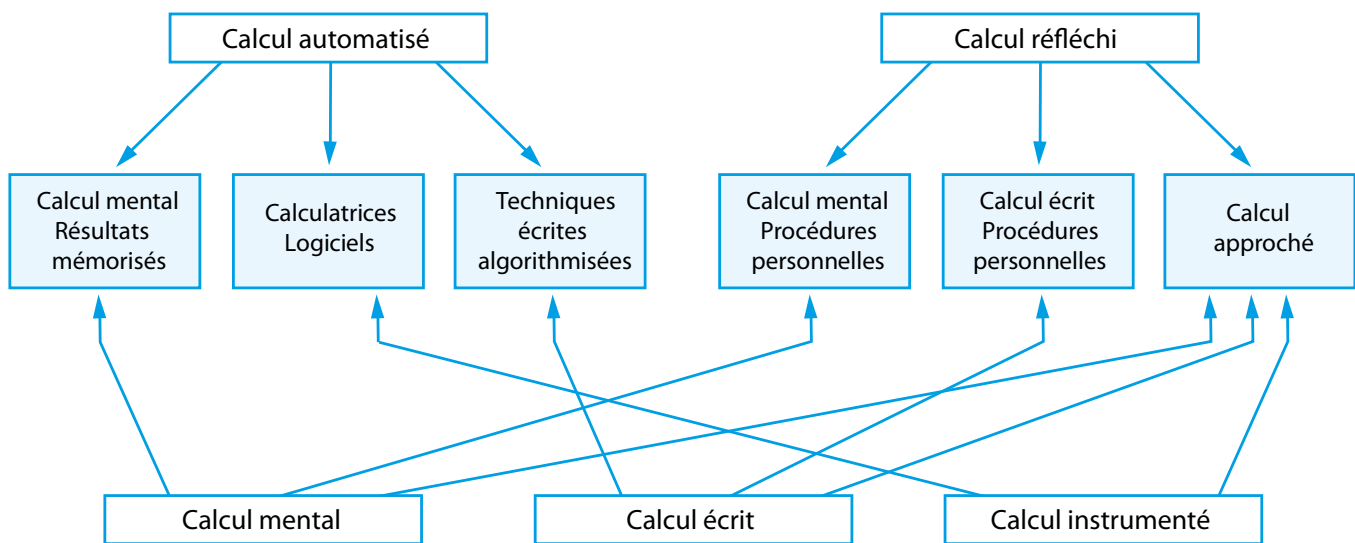
Conformément aux nouveaux programmes, la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier sera abordée au CM2, celle de deux nombres décimaux, en 6°. La division de deux nombres entiers avec quotient décimal, et la division d'un nombre décimal par un nombre entier seront abordées à partir du CM2.

- le calcul automatisé, c'est-à-dire un calcul dans lequel, à chaque étape, on ne se pose pas de question sur ce que l'on a à faire : on restitue des faits numériques mémorisés ainsi que des stratégies (appelées aussi modules de calcul élémentaires), également mémorisées.

Si nous nous intéressons maintenant au moyen utilisé pour calculer, alors nous trouvons :

- le calcul mental (effectué dans la tête) ;
- le calcul écrit qui nécessite l'utilisation d'un crayon et d'un support pour écrire ;
- le calcul instrumenté (il nécessite un matériel spécifique : abaque, table à compter, règle à calculer, calculatrice, logiciel de calcul).

Le schéma ci-dessous met en évidence les articulations entre ces différents modes de calcul (généralement convoqués simultanément ou successivement dans un calcul effectif) et contribue à envisager les différentes formes d'enseignement du calcul.



a. Le calcul réfléchi

Lorsque l'on parle de « calcul réfléchi » on met donc l'accent sur l'activité cognitive de l'élève en train de calculer. Les procédures de « calcul réfléchi » sont en effet caractérisées par le fait que l'élève prend en compte les données numériques fournies, les analyse, les situe dans le réseau des nombres, repère leurs particularités et utilise ces particularités pour choisir le traitement qu'il va leur faire subir. Ce traitement dépend étroitement des nombres en jeu, il est donc à créer à chaque nouveau calcul mais il diffère aussi suivant les élèves, chacun choisissant parmi ses connaissances celles qui lui permettent de traiter l'opération au moindre coût. De ce fait, pour chaque élève, le choix des procédures évolue dans le temps avec l'acquisition de nouvelles connaissances et la pratique.

Exemple

• Voici 4 méthodes pour le calcul de 17×8

1. Décomposer 17 en $10 + 7$

on a donc $(10 \times 8) + (7 \times 8) = 80 + 56 = 136$

2. Décomposer 17 en $20 - 3$

$(20 - 3) \times 8 = (20 \times 8) - (3 \times 8) = 160 - 24 = 160 - 20 - 4 = 136$

3. Décomposer 8 en $10 - 2$

$17 \times 8 = (17 \times 10) - (17 \times 2) = 170 - 34 = 170 - 30 - 4 = 140 - 4 = 136$

4. Reconnaître dans 8 le cube de 2 et donc doubler trois fois de suite

$17 \times 8 = [(17 \times 2) \times 2] \times 2 = (34 \times 2) \times 2 = 68 \times 2 = 136$

• **Pour le calcul de 17×9** , les trois premières méthodes peuvent s'appliquer mais pour utiliser la quatrième, il faut reconnaître dans 9 le carré de 3 et de plus il faut savoir multiplier 17 par 3 rapidement ce qui est a priori plus difficile que « doubler ».

• **Pour le calcul de 17×7** , la quatrième méthode s'avère impossible.

S'il est utile de donner des « règles » de calcul mental, il faut laisser aux élèves la décision de les utiliser ou non en fonction des nombres en jeu. Par exemple, la règle « multiplier par 4 c'est doubler 2 fois de suite » n'est pas la plus pertinente pour calculer 4×10 .

Le calcul réfléchi peut se faire mentalement car **les nombres sont envisagés dans leur globalité** et non pas chiffre à chiffre, il peut aussi se faire par écrit pendant toute la phase de construction du sens des opérations, puis plus tard, à la fois mentalement et par écrit lorsque le calcul est complexe : l'élève peut avoir en effet besoin de noter des résultats intermédiaires. L'absence de support papier n'est donc pas caractéristique de ce mode de calcul.

Dès que l'enseignant propose aux élèves des situations d'approche d'une nouvelle opération, ceux-ci mettent en œuvre **des procédures de résolution personnelles** souvent empiriques, très liées aux nombres en jeu et au contexte de la situation. Parmi ces procédures certaines **peuvent faire l'objet d'une explicitation et d'une forme écrite spécifique qui fixeront la « manière de faire »** de telle sorte qu'elles puissent être utilisées par la suite en calcul mental réfléchi.

C'est le cas par exemple des procédures de calcul par sauts pour l'addition et la soustraction.

La construction de l'algorithme définitif n'est qu'une optimisation, dans le temps, de procédures de calcul réfléchi.

Par la pratique régulière du calcul mental réfléchi, les élèves vont progressivement développer des compétences en mobilisant les connaissances qu'ils construisent sur les nombres.

Le calcul mental réfléchi a de nombreuses fonctions. Outre le fait qu'il permet de donner le résultat d'un calcul ou du moins son ordre de grandeur sans l'aide de l'écrit ou d'une calculatrice, ce qui est utile dans la vie quotidienne, il a pour but de **rendre les nombres « familiers » aux élèves**. Il les conduit à envisager chaque nombre sous de nombreux aspects ou points de vue, liés à leurs propriétés, à **mettre les nombres**

b. Le calcul automatisé

Le calcul mental automatisé renvoie à cette activité spécifique de **mémorisation de « faits numériques »** et de **« modules élémentaires de calcul »**, de manière à ce que les élèves puissent les restituer de manière automatisée lors d'un calcul. Il intervient donc tout autant dans le calcul réfléchi que dans le calcul écrit algorithmisé.

Les multiples activités proposées dans les rubriques « Calcul mental », la plupart du temps sous forme de jeux, contribuent toutes à aider les élèves à mémoriser les faits numériques et à **approfondir leurs connaissances sur les nombres de manière à les rendre flexibles**, c'est à dire disponibles pour leur servir dans des contextes différents et variés.

Donnons un exemple simple concernant le nombre 54.

Si la question est de savoir combien de boîtes de 6 œufs on peut remplir avec 54 œufs, alors la connaissance à utiliser est $54 = 6 \times 9$.

en réseau, en fonction de leurs caractéristiques, et ainsi à **enrichir la représentation** qu'ils se font des nombres de manière à rendre disponibles ces représentations lors de la résolution d'un problème.

Contrairement à une opinion trop répandue, l'usage d'instruments de calcul n'est pas une alternative aux autres formes de calcul qui rendrait ces dernières obsolètes. **L'utilisation raisonnée des instruments de calcul participe à l'apprentissage des nombres et du calcul**. Demander aux élèves de CM1 de trouver le quotient et le reste de la division de 309 par 23 avec une calculatrice n'ayant pas la touche division euclidienne relève du calcul instrumenté réfléchi et permet de renforcer les notions de quotient et de reste. De même, demander aux élèves d'afficher le nombre 37.16 sans utiliser la touche \square permet de renforcer la notion de nombre décimal.

Si la question est de savoir combien de pages d'un album seront remplies avec 54 vignettes, en collant 10 vignettes par pages, alors la connaissance à utiliser est $54 = (5 \times 10) + 4$.

Si la question est de savoir combien de carnets de 10 timbres il faut acheter pour affranchir 54 lettres, alors la connaissance à utiliser est $5 \times 10 < 54 < 6 \times 10$. Etc.

Convaincus de l'importance de l'acquisition de compétences en calcul mental, nous avons pris la décision de compléter le travail quotidien de calcul mental collectif ou sur ardoise, par un **entraînement individuel écrit**, lui aussi **quotidien dans la rubrique « Je calcule rapidement »**.

La rapidité n'est pas un objectif primordial du calcul mental automatisé (appelé parfois calcul rapide), mais il est évident que c'est un objectif important dans la mesure où le rappel en mémoire des résultats mémorisés lors d'un calcul ne doit pas faire perdre à l'élève le fil de son calcul.

GRANDEURS ET MESURES

Le domaine des grandeurs est un lieu privilégié pour lier les mathématiques aux « choses de la vie » et rapprocher l'enseignement des mathématiques de celui de l'histoire, de la géographie, des sciences expérimentales et de la technologie.

La plupart des grandeurs étudiées à l'école élémentaire sont des grandeurs mesurables, c'est à dire des grandeurs pour lesquelles, une unité étant choisie, il est possible d'associer un nombre positif, entier ou non, pour lesquelles la propriété d'additivité est vérifiée (la mesure de la somme de deux grandeurs est égale à la somme des mesures de chacune des grandeurs), ainsi que la conservation de l'ordre (si une grandeur A est plus petite qu'une grandeur B, la mesure de A est inférieure à la mesure de B).

Toutefois les élèves sont amenés à rencontrer des grandeurs simplement repérables telles le temps et les températures (grandeurs pour lesquelles la propriété d'additivité n'est pas vérifiée).

Les opérations sur les grandeurs mesurables permettent d'aborder les opérations sur leurs mesures et donc sur les nombres qui les expriment. Les notions de grandeurs et de mesure se construisent de manière dialectique en résolvant des problèmes faisant appel à différents types de tâches (comparer, es-

timer, mesurer, effectuer des opérations). Elles permettent d'enrichir la notion de nombre en mettant en évidence l'insuffisance des nombres entiers pour résoudre certains problèmes et donc la nécessité d'envisager d'autres ensembles de nombres.

Dans ce domaine, les notions d'ordre de grandeur, d'approximation et de précision prennent leur sens. Les élèves abordent là des notions relativement nouvelles puisque les activités mathématiques menées jusqu'alors conduisaient à travailler essentiellement avec des valeurs exactes.

Enfin, de nombreuses situations faisant intervenir des grandeurs mesurables qui permettent d'aborder la notion de proportionnalité et d'en étudier les propriétés.

La confusion entre une grandeur et sa mesure est fréquente : le langage courant témoigne de cette confusion : on dit «un segment de 5 cm», «un angle de 45 degrés», etc. identifiant à tort une grandeur et sa mesure. Si ces abus de langage se comprennent dans la vie de tous les jours, il est important de différencier ces notions au moment de l'apprentissage.

Le tableau ci-dessous résume les différents éléments interférant dans la construction des concepts de grandeur et de mesure au cycle 3.

grandeur	objet physique	objet géométrique	mode de comparaison directe	instrument de mesure	mesure	unité légale du système SI
cardinal	collection d'objets		correspondance terme à terme	compteur	nombre entier naturel	
longueur	baguette	segment	superposition	règle graduée	nombre réel positif	mètre m
masse	objet		balance Roberval	balance graduée	nombre réel positif	kilogramme kg
contenance	réipient		transvasement	réipient gradué	nombre réel positif	litre L
prix	objet article, etc.				nombre décimal positif	euro €
durée			simultanéité	chronomètre	nombre réel positif	seconde s
angle		secteur angulaire	superposition	rappporteur	nombre réel	degré °
aire	feuille	surface	superposition		nombre réel positif	mètre carré m ²
volume	objet	solide	immersion	réipient gradué	nombre réel positif	mètre cube m ³

Parmi les grandeurs mesurables il est nécessaire de faire une distinction entre les grandeurs que l'on peut mesurer de manière pragmatique avec des ins-

truments appropriés, sous certaines conditions, et celles dont la mesure nécessite des calculs (aire notamment). Il est important également de prendre

conscience des grandeurs pour lesquelles les unités légales sont calquées sur les unités de numération (longueur, masse, contenance) et celles pour lesquelles ce n'est pas le cas soit parce que les grandeurs sont des grandeurs produit (aire, volume) soit parce que les unités légales ne sont pas décimales (durées, angles).

Pour l'étude de la plupart des grandeurs, la progression suivie consiste généralement à faire prendre conscience aux élèves des aspects suivants.

- Étape 1. **Une grandeur existe en dehors de sa mesure :** comparer des objets du point de vue de la grandeur étudiée permet d'en saisir le sens (comparaison directe ou indirecte).

- Étape 2. **On peut mesurer une grandeur à l'aide d'une unité non conventionnelle :**

une unité de mesure étant choisie, la mesure d'une grandeur est un nombre, c'est le nombre de reports nécessaires de la grandeur unité ou de fractionnements de l'unité.

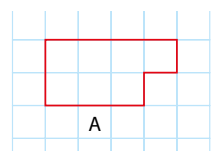
- Étape 3. **On peut utiliser des unités conventionnelles avec ces unités,** ce qui permet de mesurer des objets (la grandeur à mesurer étant précisée) et de construire des objets définis par des mesures (l'unité de grandeur étant fixée) aboutiront aux mêmes résultats quels que soient les conditions dans lesquelles se dérouleront ces tâches et les personnes qui les réaliseront.

1. Mesure des grandeurs, unités et système métrique

a. La notion d'unité

Pour de nombreux élèves à l'entrée au CM, le terme unité est surtout connu au sens « chiffre des unités » d'un nombre. Or la notion d'unité est fondamentale pour construire la notion de mesure.

Prenons l'exemple de la figure A. Alors qu'elle reste inchangée, la mesure de son aire peut correspondre à diverses réponses selon l'unité d'aire que l'on se donne pour la déterminer :



Si l'unité est un carreau, la réponse attendue est 7 u.

Si l'unité est deux carreaux, $3 u + \frac{1}{2} u$.

Si l'unité est 4 carreaux, la réponse est $1 u + \frac{3}{4} u$.

Si l'unité est 8 carreaux, la réponse est $\frac{7}{8} u$.

La mesure change quand l'unité varie, mais l'aire, c'est-à-dire la grandeur caractérisée par l'espace occupé demeure inchangée.

De manière à favoriser cette compréhension de la notion d'unité, nous privilégions, pendant toute la phase d'apprentissage, l'utilisation d'unités de référence non conventionnelles (longueur d'un segment, aire d'une surface), l'introduction et l'utilisation des unités usuelles se faisant plus tard.

b. Le système métrique

Avant l'introduction du système métrique, les règles de conversion n'étaient pas les mêmes entre les diverses unités d'une même grandeur. Par exemple, pour les longueurs, 1 pied valait 12 pouces, 1 toise valait 6 pieds. De même, pour la monnaie, une livre valait 20 sols, et un sol valait 12 deniers. On conçoit aisément la complexité des calculs, par exemple dans le problème suivant : « une toise coûte 72 livres, combien coûtent 54 toises et 5 pieds ? ». C'est encore le cas pour la mesure des durées ou celle des angles (en degré) en raison du manque d'adéquation entre des unités légales qui forment un système complexe en partie sexagésimal et les unités de numération déci-

male. Les pratiques sont d'ailleurs en train de changer : pour les petites durées (ou les petits angles), on parle de dixièmes, de centièmes, de millièmes de seconde (ou de degré). C'est aussi le cas dans les pays qui n'ont pas adopté le système métrique.

Le système métrique constitue la réponse à l'utilisation optimale de la numération décimale de position dans les activités de mesurage. Il permet de traiter les problèmes arithmétiques sur les grandeurs en travaillant à moindre coût à l'aide des opérations sur les nombres.

2. Mesure des grandeurs et instruments de mesure

Les instruments actuels de mesurage des grandeurs renvoient directement au nombre. Les machines à affichage numérique ont rendu inutile l'utilisation des diverses « unités concrètes » (les étalons et leurs multiples ou sous-multiples) pour la plupart des grandeurs. La balance Roberval permettait de comparer directement des grandeurs (masses) sans se référer au nombre, ce que ne peut faire une balance digitale. La montre à aiguilles informe en utilisant un espace (arcs de cercles). La montre digitale informe à l'aide d'un nombre. De même le mètre laser remplace progressivement le mètre à enrouleur. **Les techniques de mesurage ont donc considérablement évolué en peu de temps.** Elles conduisent à un rabattement sur le nombre.

Or les techniques de mesurage constituaient un milieu propice à l'émergence de savoirs relatifs non seu-

lement à la mesure, mais aussi aux approximations et ordres de grandeurs.

Par exemple, si les plateaux d'une balance sont presque en équilibre, c'est qu'il n'y a que quelques grammes de différence. Aujourd'hui, il n'est pas rare de voir des élèves « batailler » autour d'une balance digitale qui affiche 245 g ou 246 g en pensant que ce n'est vraiment pas pareil. Cette culture « physique » de l'« à peu près » ne peut donc plus être acquise aussi facilement. Les savoirs relatifs à l'approximation ne trouvent plus toujours leur biotope.

Certains enseignants sont hésitants à présenter une balance Roberval, objet plutôt « désuet » dans la vie courante, mais difficilement remplaçable pour une bonne représentation de la notion d'équilibre.

3. Les grandeurs et la mesure dans opération maths CM1

Certaines étapes ([étape 1](#), [étape 15](#)) ont pour but de travailler le lien entre grandeurs, problèmes et opérations.

3 Marion pèse 52 kg.
Avec sa valise à la main,
la balance affiche 77 kg.
Combien pèse la valise ?



Étape 1 Problèmes

Dans d'autres étapes les grandeurs et leur mesure sont des supports et outils de travail et c'est la notion

visée ou le thème envisagé qui est mis en avant : droite graduée ([étape 10](#)), construction des nombres fractionnaires et décimaux ([étape 68](#), [étape 74](#)), proportionnalité ([étape 62](#)), organisation et de gestion de données ([étape 17](#), [étape 91](#)). Dans de nombreuses autres étapes, certains problèmes sont posés dans un contexte de grandeur.

Les grandeurs en tant que telles sont étudiées dans les étapes identifiées « Grandeurs et mesures ».

a. Les longueurs

Tout au long du cycle 2, Les élèves ont étudié le concept de longueur et ont eu l'occasion de comparer des longueurs directement ou indirectement en utilisant un étalon arbitraire, et d'en mesurer avec une règle graduée, notamment.

En CM1, nous proposons diverses situations pour que **les élèves mobilisent leurs connaissances anciennes, les complètent, les fassent évoluer.** La notion géométrique de **distance de deux points** est associée à celle de **longueur d'un segment**, ce qui permet de définir le cercle comme ensemble de points situés à égale distance du centre ([étape 12](#)), la distance d'un point à une droite ([étape 28](#)), la distance de deux droites parallèles ([étape 32](#)).


À l'[étape 33](#), nous proposons aux élèves **d'estimer diverses distances, de les comparer, en utilisant les « étalons corporels ».** Ce « détour » nous paraît intéressant à double titre : d'une part d'un point de vue pragmatique, le recours à ces étalons est un bon moyen pour estimer des longueurs lorsque l'on ne dispose pas d'outils de mesurage, d'autre part, d'un point de vue historique, ces étalons étaient à la base des systèmes de mesure utilisés autrefois. Leur abandon correspond à une volonté d'uniformiser les mesures dans la nation. On peut souligner ici le caractère à la fois arbitraire et conventionnel des unités légales actuelles du système métrique, mais leur organisation calquée sur la base dix n'a rien d'arbitraire, comme nous l'avons vu plus haut. Ce caractère

conventionnel des unités est renforcé par la prise de conscience (étape 35) que le système métrique n'est pas couramment utilisé dans certains pays, même proches de la France comme l'Angleterre. Le travail de conversion d'unités prend alors tout son sens.

De nombreux pays ont adopté le système métrique mais nos voisins anglais ne l'utilisent pas couramment. Pour les longueurs et les distances, ils utilisent des unités liées aux étalons corporels : inch (pouce), foot (pied), yard (pas) et mile.

Combien mesure ce crayon en pouces ? en centimètres et millimètres ?

1 pied = 12 pouces
1 pas = 3 pieds
1 mile = 1 760 pas



Vérifie que 1 pouce correspond à environ 2 cm 5 mm.

Cette règle est graduée d'un côté en centimètres, de l'autre en pouces.

Étape 35 Les longueurs, les distances

Dans les pages culturelles de l'étape 60 les élèves découvrent **la naissance du système métrique et la manière dont le mètre a été défini.**

b. Les masses

L'étape 94 est consacrée à l'étude des masses. Il s'agit d'un travail qui peut être mené en interdisciplinarité avec les sciences.

La notion d'équilibre est fondamentale. C'est elle qui permet de comparer des masses directement sans recours à leur mesure. La balance Roberval ou toute autre balance à deux plateaux, ou même les balançoires « trébuchet bois » des jardins publics, permettent d'avoir une représentation simple de cette notion d'équilibre.

Aussi, si l'école n'en possède pas, nous conseillons à l'enseignant de prendre le temps de faire fabriquer aux élèves une balance « primitive » leur permettant de donner du sens à la schématisation utilisée pour représenter un équilibre. Cette notion d'équilibre permet également aux élèves de construire des stratégies personnelles de calcul pour résoudre des

c. Les contenances

L'étape 71 propose une reprise de la notion de contenance (ou volume intérieur d'un récipient). Il s'agit d'un travail sur l'unité de contenance qu'est **le litre, sur ses multiples et sous-multiples**, sur les conver-

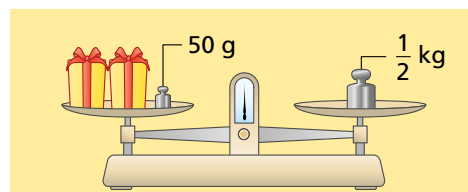
d. Les durées

Les activités proposées (étape 50) reprennent et complètent le travail effectué en CE2 : **distinction des**

La **notion de périmètre** est revue (étape 37) dans le cadre des polygones. Il s'agit d'aider les élèves, par des activités de mesurage effectif, d'estimation, de calcul, à s'approprier correctement et durablement ce concept pour éviter les confusions ultérieures entre aire et périmètre. Dans cette étape, sont introduites les « formules littérales » de calcul du périmètre du carré et du rectangle. La difficulté pour les élèves n'est pas ici le calcul effectif du périmètre, mais l'introduction de « lettres » pour désigner des nombres que l'on ne connaît pas et l'utilisation de signes d'opérations entre ces lettres. Il faudra donc être vigilant au sens que les élèves vont attribuer à ces formules de manière à ne pas hypothéquer l'entrée ultérieure dans le calcul algébrique.

Nous proposons de nouveau un travail sur la mesure des longueurs (étape 90) de manière à mettre en évidence l'utilité des nombres décimaux.

problèmes liés à la double pesée ou encore à la pesée par différence et de rencontrer physiquement les approximations.



Étape 94 Mesure de masses

Comme pour d'autres grandeurs, **le travail sur les masses permet de renforcer le sens des nombres non entiers (fractions et décimaux)** en découvrant leur utilité dans des situations concrètes dès lors que l'on souhaite donner le résultat de la mesure d'une grandeur continue en utilisant une seule unité.

sions d'unités et sur les estimations et les ordres de grandeurs. Le lien avec la vie quotidienne est assuré par de nombreux problèmes.

notions d'instant et de durée, notion de chronologie, **connaissances des unités et de leurs relations.**

La grandeur « durée » présente une spécificité : il est très souvent impossible de faire des comparaisons directes de durées, par conséquent on est obligé la plupart du temps de les mesurer, et d'effectuer des calculs. Or les unités de mesure du temps forment

e. Les angles

Les programmes préconisent une simple approche de cette grandeur dans le cadre **des angles de polygones**. Nous proposons, en géométrie (**étape 24**), le jeu de « géométriscrable » où il s'agit de **comparer des angles par superposition ou utilisation de gabarits**. Cette situation permet aux élèves de comprendre

f. Les aires

Le concept d'aire est particulièrement difficile à envisager, notamment parce qu'il n'existe pas d'instrument de mesure directe de l'aire d'une surface.

La confusion fréquente, du moins dans le langage, entre la figure géométrique, sa surface et son aire conduit souvent les élèves à des erreurs. Rappelons que nous travaillons en CM sur l'aire de surfaces planes délimitées par des figures géométriques généralement polygonales.

Une « surface » est un « objet géométrique », c'est un ensemble de points du plan. **L'aire est une grandeur attachée à une surface**, invariante lorsque l'on modifie la forme de la surface par découpage et recollement sans chevauchement. **Cette grandeur évoque l'espace occupé par la surface**. Pour rendre compte de l'aire d'une surface ou pour comparer les aires de deux surfaces qui ne peuvent être rendues superposables, on introduit la mesure.

Pour permettre aux élèves de bien comprendre ce qui vient d'être dit, nous avons fait le choix de proposer (**étape 54**) plusieurs activités de **comparaison d'aires par superposition, découpage, recollement, sans faire intervenir les nombres**.

Cette introduction nous permet, de plus, d'enrichir le sens des fractions (**étape 74**). En effet, l'aire d'un rectangle étant choisie pour unité, si on partage ce rectangle en deux parties exactement superposables, chacune a une aire qui correspond à $\frac{1}{2}$ unité.

(nous l'avons vu) un système en partie sexagésimal. Dans ce domaine, les élèves vont pouvoir résoudre par le calcul de nombreux problèmes issus de la vie quotidienne ou sociale.

qu'ils ne doivent pas prendre en compte la longueur des côtés ou l'orientation pour comparer ou reporter des angles.

La mesure des angles et l'utilisation du rapporteur sont étudiées en 6ème.



Il sera dès lors possible de donner du sens aux expressions fractionnaires $\frac{1}{4}$; $1 + \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$, etc.

Le lien avec le pavage d'une surface par un étalon est ensuite assuré.

La **propriété fondamentale d'additivité de l'aire** (l'aire d'une surface obtenue par recollement de deux surfaces est égale à la somme des aires des deux surfaces) est envisagée dans de nombreuses activités de pavage d'une surface par d'autres surfaces ou de construction de surfaces d'aire imposée.

L'**étape 55** conforte le travail mené dans l'étape précédente.

Les « formules » de calcul d'aire seront introduites en CM2.

« Les activités géométriques pratiquées au cycle 3 s'inscrivent dans la continuité de celles fréquentées au cycle 2. Elles s'en distinguent par **une part plus grande accordée au raisonnement et à l'argumentation qui complètent la perception et l'usage des instruments**. Elles sont aussi une occasion de fréquenter de nouvelles représentations de l'espace... Le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie au cycle 4 dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. » *BO Novembre 2015*.

Cette évolution de la nature même des objets géométriques et des modes de validation exposée dans les programmes de novembre 2015 a été mise en lumière par les travaux en didactique de la géométrie des dernières décennies.

Les travaux de Van Hiele (1959), repris par Houdelement, Kuzniak (1999, 2006, 2007) ainsi que par Parsysz (2001), donnent un cadre théorique pour penser la géométrie tout au long de la scolarité. Ils permettent de mettre en évidence plusieurs niveaux ou encore plusieurs « géométries ».

Chaque niveau se caractérise notamment par :

- **la nature des objets étudiés** : objets physiques (objets manipulables notamment), objets graphiques (dessins), objets théoriques (figures au sens conceptuel) ;
- **les modes de validation** qui appartiennent à différents registres : perception globale, perception instrumentée, raisonnement (déductif) ;
- **le langage utilisé**.

Les enseignants ont le rôle d'aider les élèves à comprendre les enjeux liés à ces différents points de vue et les ruptures nécessaires dans les manières de faire de la géométrie.

	Géométries non axiomatiques		Géométries axiomatiques	
Type de géométrie	géométrie concrète G0	géométrie spatio-graphique G1	géométrie proto axiomatique G2	géométrie axiomatique G3
Objets	physiques	physiques et graphiques (dessins)	théoriques (figures)	théoriques
Validation	perception globale	perception instrumentée	raisonnement déductif	raisonnement déductif
Cycle de la scolarité	cycle 1	cycle 2, cycle 3	(cycle 3), collège	collège, lycée, université

Comme on le voit dans le tableau ci-dessus, au cours du cycle 3, la géométrie à enseigner est une géométrie qui reste **pragmatique**, mais il ne s'agit cependant pas de proposer aux élèves des activités qui soient simplement de l'observation, des constats et des savoir-faire.

Complétant cette approche, les travaux de Berthelot et Salin (1992, 2001, 2008) permettent d'envisager les liens entre les notions que les élèves utilisent en actes dans l'espace environnant (mésospace) et les notions géométriques qui leur sont associées et qui vont être, pour la majorité d'entre elles, étudiées dans l'espace de la feuille de papier (micro-espace). Les notions de micro-espace, mésospace, macrospace (espace d'un quartier, d'une ville) ont été introduites en didactique des mathématiques par Galvez qui a montré que **les procédures de résolution d'un problème de nature spatiale étaient liées à la taille de l'espace dans lequel il est posé**.

Pour plusieurs notions, notamment celles de distance, d'alignement, de parallélisme, d'orthogona-

lité, d'angle, des allers retours entre des problèmes posés dans l'espace environnant et dans l'espace de la feuille de papier permettent de mieux prendre en charge ce passage de la connaissance de l'espace à la géométrie.

Enfin les travaux développés par Perrin et Godin et leur équipe de l'université d'Artois donnent des pistes pour envisager **les différents types de tâches à proposer aux élèves** (reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire) portant sur des objets géométriques et les contraintes à fixer dans la situation, notamment relatives aux supports et aux instruments) **pour faire émerger des concepts géométriques**.

Les connaissances spatiales et géométriques dont l'apprentissage est visé au cycle 3 sont des **connaissances fonctionnelles et non formelles**. Elles apparaissent comme réponses adaptées à des problèmes pour lesquels les élèves ont souvent construit antérieurement des réponses implicites qui peuvent les

aider ou au contraire faire obstacle à l'installation de nouvelles connaissances.

Les activités proposées ont pour but de travailler le passage de ce qui est vécu en actes dans le méso-espace ou qui est perçu visuellement dans le micro-espace à ce qui est vérifié expérimentalement en utilisant des instruments, puis décrit et, petit à petit, argumenté dans un langage précis et approprié.

Le travail sur l'espace et la géométrie s'accommode assez mal de la forme « manuel scolaire ». Pour résoudre ce problème nous proposons :

– **des « étapes clés » dans lesquelles vous trouverez des activités à mettre en oeuvre hors manuel** : elles peuvent se dérouler dans la cour de récréation ou dans la classe ; elles nécessitent souvent un peu de matériel qui est listé dans chaque étape concernée. Ce matériel peut être à rassembler par vous-même

(corde, plots, mètre en bois, équerre de tableau, etc.) ou à construire à l'aide des fiches photocopiables (polygones, solides, etc.) ;

– **des fiches photocopiables** de la plupart des étapes de géométrie, dans ce guide et dans le CDROM pour que les élèves puissent travailler directement sur la photocopie sans avoir besoin de décalquer les figures ;

– **le cahier d'entraînement** sur lequel les élèves peuvent effectuer les tracés.

Dans le cadre de la liaison CE2/CM1, la première séance de géométrie de l'année est conçue comme une séance vous permettant de poser un diagnostic sur les connaissances et habiletés de vos élèves. Les différentes notions abordées seront reprises et approfondies au cours de l'année.

1. Les relations géométriques fondamentales

a. La distance

– La notion de distance est une notion fondamentale en géométrie.

Les élèves ont déjà rencontré le concept de longueur au cycle 2 et ont déjà eu l'occasion de comparer des longueurs et d'en mesurer. Ils ont aussi commencé à envisager la distance de deux points. Dans ce cas, **le segment à mesurer n'est pas matérialisé, ils ont donc à concevoir la ligne droite comme plus court chemin entre ces deux points.**

Dans l'activité hors manuel de l'étape 9, les élèves doivent prendre en charge dans le méso-espace la construction de la ligne droite reliant deux points et la position du milieu sur le segment défini par ces deux points. Pour résoudre le problème, les élèves auront à construire des stratégies : mise bout à bout de plusieurs règles, ce qui nécessite de vérifier leur alignement ; glissement de la règle sur sa trace, utilisation d'une ficelle tendue pour contrôler le déplacement de la règle graduée ; tracé du segment, recherche du milieu par mesurage, ou par pliage d'une ficelle, ou bien recherche visuelle à l'oeil puis approximations successives, etc. ;

Reprises dans l'espace de la feuille de papier, ces activités permettent aux élèves de constater que dans le micro-espace, certaines difficultés sont résolues par l'usage des instruments. Nous insistons sur **l'utilisation d'une bande de papier pour déterminer le milieu d'un segment par pliage**, procédure à la fois plus précise et plus facile à utiliser puisqu'elle ne dépend ni de la maîtrise de la lecture de la règle graduée, ni de la capacité à diviser par deux une mesure de longueur qui peut ne pas être entière.

La distance de deux points permet également de définir la **notion de cercle (étape 12)**. Cette figure, déjà connue des élèves comme dessin tracé avec un compas, devient ainsi un « ensemble de points » situés à égale distance du centre. Cette nouvelle « vision » du cercle trouve une application très importante dans la construction d'un triangle dont on connaît les longueurs des 3 côtés. Cette construction est abordée dans des cas particuliers au CM1 et sera institutionnalisée au CM2.

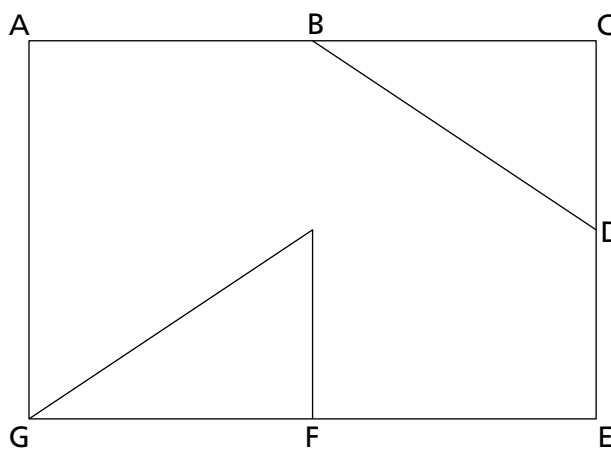
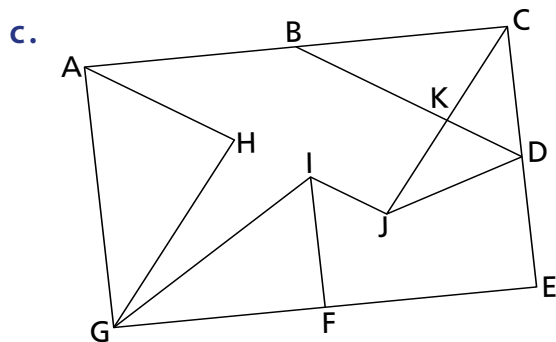
b. L'alignement

– La notion d'alignement a fait l'objet d'un travail consistant tout au long du cycle 2. En CM1, cette notion est reprise (étape 16) dans **le cadre de l'ana-**

lyse et de la reproduction de figures géométriques : les élèves sont conduits à repérer des alignements de points ou de segments dans différentes figures

géométriques et à les contrôler à la règle, ce qui contribue à mettre en évidence certaines propriétés

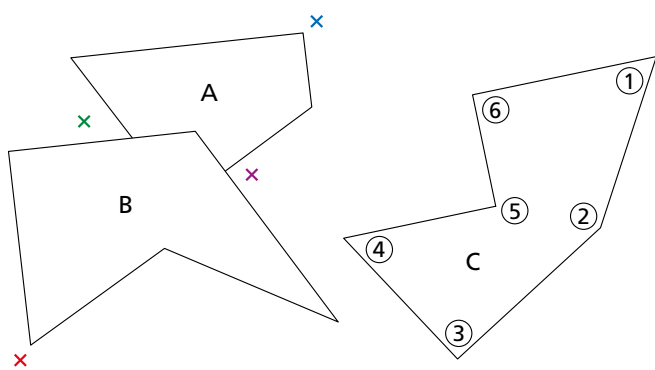
des figures étudiées et par suite à savoir les décrire, les reproduire ou les construire.



Les angles

– La notion d’angle peut être envisagée sous différents aspects : angle de vue ou de visée, angle de rotation, angles de figures. C’est ce dernier point de vue que nous privilégions au CM1 : **les angles sont des angles d’un polygone** intervenant dans un jeu « d’assemblage » (étape 24), ce qui conduit les élèves à les comparer puis ensuite à les reproduire en utilisant des instruments (gabarits d’angle, papier calque, porte angle constitué de deux bandes de bristol articulées).

La notion d’angle droit, connu depuis le cycle 2, est parfois encore mal maîtrisée par certains élèves, notamment lorsque ces angles ne sont pas en position prototypique (horizontal, vertical). **Une équerre confectionnée par double pliage** d’une feuille de papier non rectangulaire permet aux élèves de mieux identifier les positions spécifiques des deux côtés d’un angle droit.



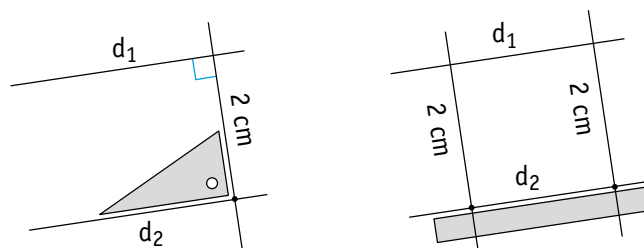
d. Orthogonalité et parallélisme

– Pour enrichir et approfondir les notions d’orthogonalité et de parallélisme, nous les associons à la **notion de distance d’un point à une droite et de distance de deux droites**. À l’étape 28, dans l’activité hors manuel, les élèves doivent trouver la plus courte distance entre les points d’une droite tracée au sol et un piquet extérieur à la droite en se déplaçant sur cette droite. Cette activité permet de concevoir la droite perpendiculaire à la ligne droite tracée au sol comme moyen d’obtenir cette plus courte distance. Le travail sur la feuille de papier permet de revoir

l’identification et le tracé de droites ou de segments perpendiculaires.

C’est encore la distance de deux points qui permet dans le méso espace d’approfondir la notion de parallélisme (étape 32) : deux droites sont parallèles lorsque leur écartement est constant. Dans la cour, les élèves doivent placer plusieurs points à une distance fixée d’une droite donnée. Pour cela ils doivent prendre en charge la nécessité de reporter la distance choisie sur une demi-droite perpendiculaire à

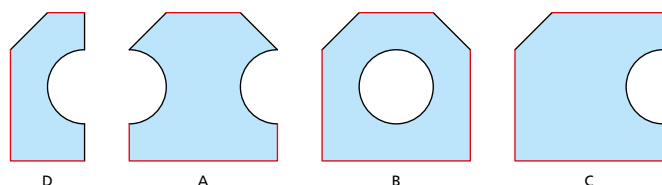
la droite donnée, contrôler la perpendicularité (avec l'équerre du tableau par exemple), puis contrôler la distance. La nécessité de placer plusieurs points dans un temps limité (situation de jeu de compétition) conduit à améliorer cette stratégie de construction point par point et à avancer vers la solution experte consistant à placer deux points et à tracer la droite passant par ces deux points. Cette nouvelle caractérisation du parallélisme complète la vision première de deux droites parallèles comme perpendiculaires à une même troisième droite. Ces deux aspects permettent de justifier à l'étape 32 les deux constructions sur la feuille de papier de deux droites parallèles avec la règle et l'équerre.



Nous insistons sur l'acquisition d'une certaine maîtrise du vocabulaire en travaillant sur des formulations proches renvoyant à des réalités différentes, par exemple « les droites d et f sont perpendiculaires » et « les droites d et f sont perpendiculaires à la droite h » qui traduit que d et f sont parallèles entre elles.

e. Symétrie

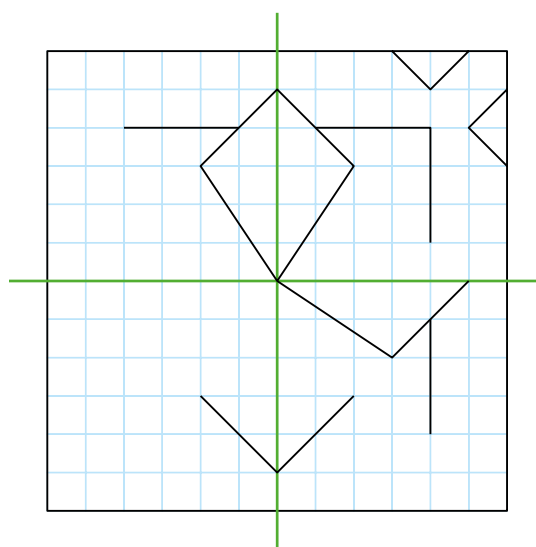
– La notion de symétrie axiale est reprise dans la situation des « napperons » (étape 67) déjà envisagée au CE2 : les élèves ont à anticiper l'effet du découpage réalisé sur un carré de papier plié en deux ou en quatre.



Cette situation leur permet de mettre en œuvre plusieurs « théorèmes en actes », (exemple : pour obtenir un triangle isocèle dans un papier plié en deux ils effectuent une des deux coupes perpendiculairement au pli), la manipulation étant ici la matérialisation de l'anticipation et un moyen efficace de validation expérimentale.

Dans l'étape 72 les élèves doivent trouver les axes de symétrie des polygones usuels, toujours dans une situation d'anticipation. Enfin l'étape 75 est consacrée à la manière de compléter sur quadrillage une figure dont on sait qu'elle a un ou deux axes de symétrie (dans diverses positions).

Rappelons que les éléments déjà donnés peuvent être situés de part et d'autre de l'axe de symétrie.



2. Les figures planes

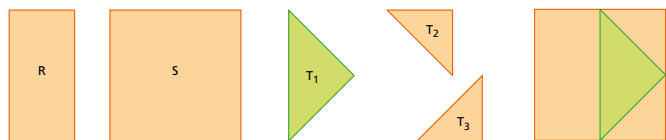
La progression que nous proposons a pour but d'accompagner les élèves à changer de regard sur les figures planes. Au CE2, les figures sont souvent perçues comme des objets matériels (morceaux de papier ou de carton, pièces de puzzle, etc.) ou des « objets des-

sins », dont les élèves ont une vision globale. Au cours des deux années de CM, les élèves vont développer une vision plus locale de manière à comprendre que les figures planes sont constituées de lignes et de segments dessinés sur une feuille de papier (ou

un écran d'ordinateur) ayant certaines propriétés. Ces propriétés ne sont plus simplement vues, mais doivent être mises en mots, phase fondamentale dans le processus de conceptualisation, et vérifiées avec des instruments. C'est l'objet des **étapes 36 et 43** au cours desquelles les élèves ont à décrire des figures, les identifier à partir d'un « portrait » ou encore trouver un critère commun qui a conduit à en regrouper certaines, pourtant différentes. Ces activités développent les capacités d'observation des élèves et les initient au **fonctionnement particulier du langage en mathématiques**.

Rappelons que le langage mathématique ne suit pas le principe de l'information maximum, comme c'est le cas dans le langage usuel : ainsi la phrase « un carré a deux angles droits » est une phrase vraie en mathématiques (puisque un carré a 4 angles droits, il en a donc a fortiori 2). De même dans un jeu de portait si la figure choisie est un carré, à la question « la figure est-elle un rectangle ? » la réponse est « oui » puisque tous les carrés sont des rectangles (particuliers). Pour initier les élèves progressivement à ce fonctionnement particulier, nous engageons les enseignants à utiliser des expressions telles que « la figure a exactement 2 angles droits » ou « la figure a au moins 2 angles droits. » Notons qu'en CM les propriétés données pour chaque polygone usuel sont souvent surabondantes, la recherche de propriétés caractéristiques relève du collège.

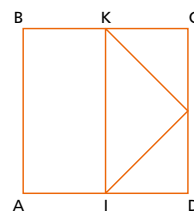
Le travail spécifique de double lecture d'une **figure complexe lue comme une juxtaposition ou une superposition de « pièces » (figures simples), ou lue comme un ensemble organisé de lignes et de points**, est développé à l'**étape 47**.



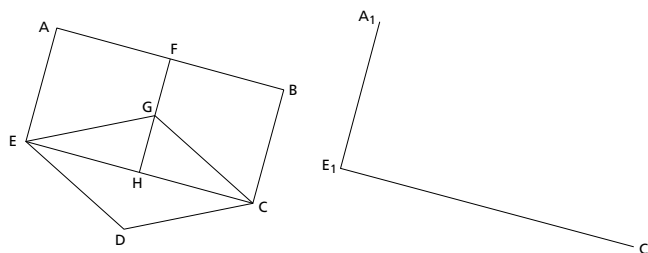
Il permet en outre aux élèves de comprendre la nécessité du **codage des points par des lettres** pour exprimer des relations entre ces lignes et ces points.

3. Les solides de l'espace

Quelques connaissances générales sur les solides sont en jeu dans des situations (**étape 83**) invitant à des **allers retours entre les objets de l'espace de dimension 3 et leurs représentations planes (en di-**



C'est le travail de reproduction de figures complexes (**étapes 52 et 56**) qui lie les notions géométriques fondamentales et les figures planes : **pour pouvoir reproduire ou restaurer une figure en l'agrandissant ou en la réduisant, l'analyse des positions relatives des éléments qui la constituent est indispensable** (recherche d'alignements de points, de milieux de segments, de parallélisme, d'angles droits, d'égalité de longueurs). L'échelle de reproduction est donnée par certains éléments déjà tracés et non par un coefficient numérique, pour éviter le recours au mesurage et au calcul, et rester ainsi dans le domaine de l'analyse géométrique.

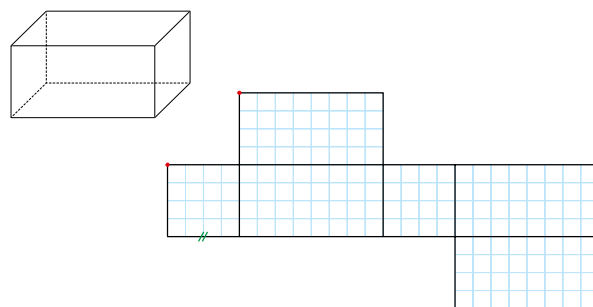


La figure agrandie sur un calque ou un transparent (disponible en fiche à photocopier) permet aux élèves de valider ou non leur construction. Rappelons que si on a à reproduire une figure à même échelle que le modèle, il suffit de procéder par report de longueurs, sans avoir besoin d'analyser la figure modèle.

À l'**étape 63**, les élèves apprennent à hiérarchiser les informations permettant de construire une figure sans la voir. Le travail sur des figures tracées à main levée sur lesquelles les informations sont données soit par un codage spécifique (angle droit, segments de même longueur) soit par des informations textuelles, initie les élèves à l'élaboration de raisonnements de type déductif.

mension 2). La perte d'information lors du passage de l'espace au plan est mise en évidence. Les activités d'identification et de description des solides conduisent à mettre en œuvre les connaissances

acquises sur les figures planes usuelles. Les propriétés des pavés (étape 88) et des cubes (étape 92) sont travaillées, notamment à partir de situations consistant à anticiper la construction effective de ces solides à partir d'un de leurs patrons.



4. Le repérage dans l'espace

Déjà largement travaillé au cycle 2 en terme de relations spatiales et de points de vue, le repérage porte en CM sur **l'utilisation de plans et de cartes** (représentations planes du macro-espace) (étapes 17 et 97). Ce domaine est travaillé en mathématiques en

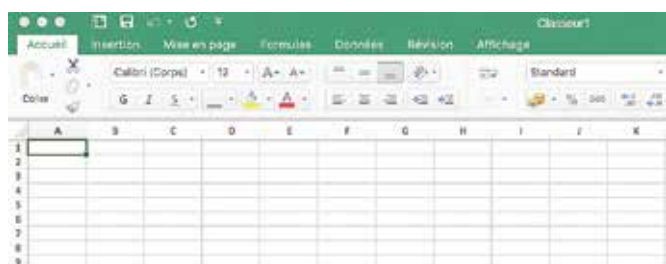
liaison avec d'autres champs disciplinaires (notamment la géographie). Il permet d'affiner la maîtrise du repérage cartésien ainsi que la maîtrise de la langue dans son aspect outil.

PREMIERS PAS DANS L'UTILISATION DE LOGICIELS POUR LES MATHÉMATIQUES

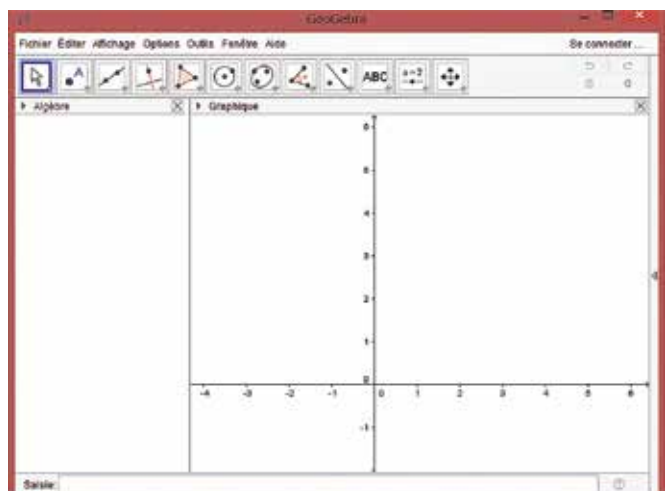
Conformément aux programmes, nous proposons aux élèves de CM1 une première initiation à l'utilisation de **deux types de logiciels très utiles pour les mathématiques : un tableur pour effectuer des calculs, et un logiciel de construction géométrique** geogebra, libre de droit, et téléchargeable aisément.

Le travail, proposé dans le cahier d'entraînement, s'inscrit dans la progression du manuel.

En **période 1** les élèves ont revu les opérations arithmétiques aussi nous leur proposons d'apprendre à **utiliser une feuille de calcul** pour compléter un bordereau de commande.



En fin de **période 2**, c'est la découverte du logiciel « geogebra » que nous proposons.



Ses icônes désignent des **relations ou des objets géométriques** que les élèves ont étudiés au cours de la période.



Après avoir appris à analyser des figures géométriques, au cours de la **période 3**, pour les construire avec les instruments traditionnels, les élèves vont apprendre à les **construire sur l'écran** avec le logiciel.

Au cours de la **période 4** les élèves ont appris à compléter des figures par symétrie sur quadrillage, nous leur proposons de poursuivre ce travail sur écran en utilisant les icônes permettant de **transformer une figure par symétrie axiale**.

Enfin, pour terminer l'année (**période 5**), nous revenons à **l'utilisation du tableur** pour résoudre une situation de comparaison de tarifs, bien adaptée à ce logiciel.

Ces 5 séances de classe, qui peuvent être conduites en petits groupes, nécessitent de disposer de quelques ordinateurs munis de ces logiciels. Même si un nombre important de questions portent sur des prévisions, l'ordinateur doit être là pour **contrôler ces prévisions** et pour effectuer le travail que les élèves lui commandent.

Nous attirons votre attention sur le fait qu'il existe plusieurs versions d'un même logiciel (plus ou moins récentes, pour PC ou pour mac), vous trouverez donc peut-être quelques différences entre ce que nous présentons sur les pages du cahier et ce qui s'affiche sur votre ordinateur, c'est un problème récurrent en informatique auquel nous devons nous adapter!

Partie 2

Étape par étape



