1

Qu'est-ce qu'une activité mathématique ?

Pour répondre à la question « Qu'est-ce qu'une activité mathématique ? » et pour montrer comment le manuel peut contribuer à réguler cette activité, nous vous proposons une petite promenade dans quatre classes où la même séquence d'apprentissage est mise en œuvre suivant quatre scénarios différents. Nous montrerons ainsi l'influence que peuvent avoir des choix « presque pareils mais pourtant différents » sur la façon dont les élèves s'approprient les mathématiques et sur le sens que les mathématiques prennent pour eux.

1.1. Presque pareils et pourtant tellement différents

Imaginons un professeur de CM1 voulant introduire l'addition des nombres décimaux et supposons que ses élèves aient déjà appris ce que sont des fractions décimales et donnent du sens aux écritures additives telles que $3 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$.

Il regarde l'étape 72 (p. 176-177) du manuel Euromaths CM1 et lit dans la découverte l'énoncé suivant : *Pour construire une grande frise chronologique, des enfants mettent bout à bout deux bandes de carton. La première mesure 1,45 m et la seconde mesure 2,7 m. Quelle est la longueur de la bande ainsi obtenue ?* [1]

À partir de cet énoncé, il imagine un scénario de classe. Nous allons étudier quatre scénarios possibles parmi d'autres.

Scénario 1

• Le professeur écrit l'énoncé ci-dessus au tableau.

• Il conduit ensuite une activité collective qui s'appuie sur des savoirs déjà acquis :
il propose de transformer 1,45 et 2,7 en écritures fractionnaires :
$1,45 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$ et $2,7 = 2 + \frac{7}{10}$
puis d'additionner les unités avec les unités et les dixièmes avec les dixièmes, ce qui permet d'aboutir à $3 + \frac{11}{10} + \frac{5}{100}$
puis, par un travail de réduction, à $3 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$
c'est-à-dire $4 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$.

• Il conclut par un retour à l'écriture décimale 4,15
1,45 + 2,7 = 4,15 et pose l'addition en colonnes

	unités		dixièmes	centièmes
	1			
	1	,	4	5
+	2	,	7	
	4	,	1	5

ce qui permet d'institutionnaliser l'addition de deux nombres décimaux et la manière de faire (addition en colonne, virgule sous virgule).

Scénario 2

• Le professeur écrit l'énoncé au tableau.

• Il demande aux élèves de prévoir la solution, en les engageant à utiliser les deux données 1,45 m et 2,7 m.

Ceux-ci identifient facilement un problème de nature additive, ce qui va les conduire à l'addition de 1,45 et 2,7 qu'ils ne connaissent pas.

Le professeur compte sur la confrontation des propositions qui, dans un premier temps, peuvent n'être que de simples paris, pour aboutir à son objectif : constater que les élèves parviennent à des réponses différentes alors qu'ils savent bien que, ici, un seul résultat est possible.

Vraisemblablement, certains des élèves feront des propositions erronées comme 3,52 ou 3,115 ou 1,72.

– Le résultat 3,52 procède de l'addition de chacune des deux parties des nombres (avant et après la virgule). Cela renvoie à la représentation que se font de façon très tenace certains élèves du nombre décimal comme couple d'entiers naturels.

– Le résultat 3,115 procède d'une conception très proche (2 + 1 = 3 et 45 + 70 = 115).

– Le résultat 1,72 (145 + 27 avec virgule mise ensuite) atteste que d'autres élèves reviennent à l'addition de deux nombres entiers et placent ensuite la virgule « comme ils peuvent ».

• Une fois les prévisions recueillies, le professeur peut faire rejeter celles qui sont facilement réfutables. Par exemple pour 1,72 : Comment, avec une bande obtenue en mettant bout à bout deux bandes de 1,45 m et de 2,7 m obtient-on une bande de 1,72 m ? C'est « visiblement » impossible !

1. On se place donc résolument ici dans le cadre d'une situation d'introduction d'une notion et non pas dans le cadre d'une situation d'entraînement ou de bilan. Par ailleurs, nous avons fait le choix de ne pas faire travailler précédemment les élèves sur les conversions d'unités afin de mieux asseoir la construction des nombres décimaux. Avec cette progression, il est alors peu probable que les élèves convertissent les mesures en centimètres, procédure certes correcte mais que nous n'encourageons pas à ce stade de l'apprentissage.

• Il peut reprendre ensuite le scénario 1 et montrer, à l'aide des écritures fractionnaires décimales, pourquoi le résultat 4,15 est le seul recevable.

Scénario 3

• Le professeur raconte le problème en montrant deux bandes de carton (une de 1,45 m et l'autre de 2,7 m) et en les mettant bout à bout sur le sol de la classe.

• Puis il écrit l'énoncé au tableau.

• Il met ensuite les élèves par groupes. Il a prévu une paire de bandes par groupe. Chaque groupe dispose donc des deux bandes et mesure la bande obtenue par la mise bout à bout.

• Il affiche les résultats obtenus par chaque groupe. Les résultats « tournent autour » de 4,15 m. Le professeur se sert alors de l'écriture fractionnaire, en reprenant le scénario 1 pour introduire l'addition des nombres décimaux et prendre position par rapport aux résultats trouvés.

Scénario 4

• Le professeur procède comme pour le scénario 3 pour les deux premiers points.

Il demande ensuite éventuellement une évaluation « à vue d'œil » de la longueur de la bande obtenue puis invite les élèves à se servir des données de l'énoncé : *« Vous devez prévoir, par des calculs, la longueur obtenue lorsque l'on met ces deux bandes bout à bout. Une fois vos prévisions effectuées, nous vérifierons en mesurant, puis nous étudierons comment vous avez procédé pour faire votre prévision. »*

• Tout comme dans le scénario 2, les élèves identifient facilement un problème de nature additive, ce qui les engage dans l'addition de 1,45 et 2,7 qu'ils ne connaissent pas.

Leurs propositions vont être de même nature que celles vues dans le scénario 2. La prévision 1,72 m sera sans doute écartée pour des raisons de vraisemblance.

• Lorsque chaque élève a fait sa prévision, le professeur organise un mesurage effectif de la bande par un ou deux élèves, sous le contrôle des autres. Les résultats de la mesure seront 4,15 m (ou « aux alentours » de 4,15 m). Ce résultat expérimental va permettre d'écarter bon nombre de propositions et donc de remettre en cause les modèles qui en sont à l'origine. La classe est ainsi amenée à s'interroger non pas sur « Est-ce que c'est juste ou faux ? », cette question étant réglée par la confrontation à l'expérience, mais sur « Pourquoi est-ce faux ? » et « Comment allons-nous améliorer notre modèle de l'addition de deux décimaux ? ».

• Le professeur fait examiner, par groupes d'élèves, les calculs faits afin que l'origine des erreurs soit identifiée. Il peut, par exemple, regrouper les élèves qui ont produit des erreurs du même type.

• Il propose alors d'utiliser l'écriture fractionnaire comme moyen de mieux prévoir, éventuellement avec une autre paire de bandes afin de ne pas reprendre les mêmes nombres. Les élèves s'appuieront ainsi sur le lien entre écriture à virgule et écriture fractionnaire pour construire une prévision mieux étayée et avancer un début de preuve.

Premier bilan

Ces quatre scénarios ont un même but : l'introduction de l'addition de deux nombres décimaux.

Ils ne présentent pas de grandes différences du point de vue de l'organisation. Le scénario 3 demande une préparation matérielle assez lourde (plusieurs fois deux bandes), le scénario 4, une préparation plus légère (deux bandes). Une lecture attentive du manuel permet de voir que l'activité préparatoire de découverte de l'étape 72 est construite comme le scénario 4. Nous y reviendrons.

Dans les quatre scénarios, apparaît à un moment le retour aux écritures fractionnaires décimales. Il s'agit de revenir à la signification des dixièmes : un dixième, c'est ce que l'on obtient quand on partage l'unité en 10 parties égales ; donc 10 dixièmes, c'est l'unité ; donc 11 dixièmes, c'est une unité et un dixième ; etc.

Pourtant, ces scénarios sont très différents du point de vue des rôles que jouent les élèves et le professeur.

1.2. Le contenu et la manière

Intéressons-nous tout d'abord à deux questions générales que tout enseignant se pose lorsqu'il doit prendre des décisions : « Qu'est-ce qui doit être appris ? » et « Comment cela sera-t-il appris ?».

La réponse à la première question est la même pour les quatre scénarios : il s'agit de faire apprendre l'addition des nombres décimaux.

Venons-en maintenant à la seconde question.

■ Le **scénario 1** montre une organisation très claire des savoirs : le professeur explique et s'assure que les élèves comprennent bien ce qui est enseigné. Mais les élèves ne font pas de prévision : les calculs qu'ils ont à faire dans une telle séance sont commandés par le professeur. Il s'agit d'une pédagogie du modèle dans laquelle les élèves peuvent être ou non passifs, ce qui n'exclut pas, bien sûr, tout apprentissage (nous avons bien souvent appris comme cela), mais qui n'intéressera que les élèves qui ont beaucoup investi dans l'école et pour lesquels toute séance est l'occasion d'apprendre quelque chose.

■ Le **scénario 2** montre que le professeur donne de l'importance à l'implication personnelle des élèves. Il propose une situation dont les enjeux sont plus forts : prévoir un résultat. Mais cette prévision est fictive : elle ne fera pas l'objet d'une confrontation au réel. La négociation sur la validité ou non de la prévision se fera par un discours (utilisant des savoirs antérieurs directement apportés par le professeur).

■ Le **scénario 3** permet à chaque groupe d'élèves de manipuler les bandes et d'effectuer un travail de métreur. Les élèves n'ont à faire aucune hypothèse. Ils pourront associer le résultat de leur mesurage à l'addition des deux décimaux. Le résultat est obtenu par un travail pratique sur les objets. On pourrait dire que le professeur a proposé un contexte concret. Par un exposé proche de celui du scénario 1, il fera ensuite une synthèse. À aucun moment la construction de l'addition de deux décimaux n'a été objet d'étude du côté des élèves.

■ Le **scénario 4** engage chaque élève à construire une hypothèse, à faire une prévision par le calcul en étant provisoirement privé du dispositif matériel. Il engage aussi l'élève à prendre conscience de la validité ou non de son hypothèse par une confrontation, après coup, avec le réel. Il reste, pour le professeur à faire en sorte que les premières preuves liées à cette confrontation au matériel (preuves sémantiques) soient remplacées par des preuves construites à l'aide d'écritures et de résultats mathématiques antérieurs (preuve de nature syntaxique utilisant les écritures fractionnaires décimales).

Ces quatre scénarios n'engagent donc pas les élèves dans un même rapport au savoir.

1.3. Les rôles du professeur et des élèves

Dans chacun de ces scénarios, la mise en scène choisie par le professeur, le rôle qu'il y joue et le rôle que pourront y jouer les élèves ne sont pas les mêmes.

■ **Scénario 1 :** le professeur dispense le savoir et s'assure, par des moyens connus, de la bonne compréhension de son cours. Les élèves ont à « appliquer ». Il est peu probable qu'ils puissent d'eux-mêmes prendre conscience de leurs erreurs. C'est le professeur qui en assurera la correction.

■ **Scénario 2 :** le professeur choisit d'inciter les élèves à produire des propositions. On pourrait dire qu'il pratique une méthode où les élèves sont plus actifs. Mais il dispose de peu de moyens pour conduire une synthèse (écarter les propositions manifestement erronées). Il est rapidement conduit à se rapprocher du scénario 1 s'il veut que les élèves apprennent. Les élèves ont un rôle de prévisionnistes à un moment, mais leurs prévisions seront validées ou invalidées par le recours à l'exposé des savoirs comme dans le scénario 1. C'est un rôle un peu frustrant puisque la prévision n'est pas mise à l'épreuve des faits.

■ **Scénario 3 :** le professeur permet aux élèves de déployer leur énergie à mesurer. Il développe son exposé comme moyen de conforter les résultats trouvés matériellement. Les élèves mesurent. Ils peuvent, ou non adhérer à l'exposé du professeur : ils savent qu'ils ont trouvé le résultat en mesurant. À aucun moment ils ne sont dans une situation où des calculs sont des outils de prévision.

■ **Scénario 4 :** le professeur construit un environnement auquel les élèves doivent s'adapter. C'est le dispositif, et non le professeur, qui renvoie le résultat juste et permet d'écarter radicalement les propositions erronées. Les élèves font des propositions qui sont mises à l'épreuve des faits. Ils sont ici dans un rôle de responsables car la proposition de chacun est confrontée à l'environnement matériel et rend nécessaire de revenir sur le calcul qui l'a produite. Le professeur doit alors encourager et aider les élèves qui ont donné des résultats erronés à revenir sur leurs procédés de calcul afin de comprendre les erreurs produites. Un des moyens d'y arriver est de revenir aux écritures fractionnaires afin de trouver comment prévoir à coup sûr le résultat de tout exercice qui serait de même nature que celui proposé.

On voit donc que le rôle du professeur est déterminant à plus d'un titre.

1.4. Des statuts différents pour des « mêmes » moments de classe

Prenons l'exemple de la phase de synthèse collective.

■ **Scénario 1 :** la synthèse va de pair avec le cours. Le vrai est ce que le professeur enseigne.

■ **Scénario 2 :** la synthèse consiste à prendre en compte les travaux de chaque groupe et à faire comprendre quel est le bon résultat. C'est le professeur qui doit à un moment ou un autre « dire le vrai », « faire le cours ».

■ **Scénario 3 :** le résultat est donné par le travail de mesurage effectif. Là encore, le professeur doit « dire le vrai mathématique » qui va justifier l'obtention du résultat par le calcul.

Dans aucun de ces scénarios, le travail sur les nombres n'a le statut d'outil de prévision de ce qui se passe lorsque l'on met les bandes bout à bout.

■ **Scénario 4 :** la phase de synthèse ne porte pas sur la recherche du résultat juste obtenu (ou non) par les élèves puisque ce résultat est donné par un mesurage effectif. Elle porte sur les raisons pour lesquelles les prévisions faites sont ou non en conformité avec la

réalité et sur la façon dont elles pourront être menées dans une situation similaire.
L'engagement des élèves dans ce qui fonde la cohérence du travail (prévoir par des écrits ce qui se passe dans la réalité) n'est pas de même nature. Il est fort probable qu'à terme ce type d'engagement change le rapport à l'erreur et au savoir dans les phases d'apprentissage.

1.5. Conclusion

En parcourant ces quatre scénarios, nous n'avons pas eu à décrire des pratiques pédagogiques mais des décisions de nature didactique sur la mise en scène de l'activité.

■ Le **scénario 1** permet d'effectuer une visite du savoir mathématique visé par le professeur, mais ne propose pas un environnement permettant ce jour-là une activité mathématique.

■ Le **scénario 2**, s'il permet de caractériser le moment de calcul comme un moment de prévision, ne crée pas un environnement suffisamment structuré pour que les conjectures des élèves soient, un temps, mises à l'épreuve des faits matériels.

■ Le **scénario 3** fait la part belle à la manipulation sans travail de prévision, donc de mathématisation en acte.

■ Le **scénario 4** constitue un choix didactique qui permet aux élèves à la fois de construire le savoir visé et de pratiquer une activité mathématique.

Il y a dans ces scénarios, des enjeux qui se nouent :
– écouter, imiter dans le scénario 1 ;
– faire des prévisions dans le scénario 2 ;
– manipuler sans modéliser dans le scénario 3 ;
– faire construire des propositions, les faire évoluer dans un processus de mathématisation en les mettant à l'épreuve des faits (épreuve d'abord matérielle puis à l'aide du langage mathématique) dans le scénario 4. Ce scénario contient les ingrédients qui nous rapprochent d'une réelle activité mathématique.

L'activité mathématique est en effet fondée sur une dialectique fondamentale entre faire une conjecture et apporter la preuve que celle-ci est vraie ou fausse (ici, prévoir un résultat pour la bande de carton et vérifier la validité de cette prévision). Le professeur a la liberté de s'approprier l'activité et de l'organiser à sa façon : le scénario 1, par exemple, est tout à fait possible dans une classe de très bon niveau. Mais, à l'étape 72, en faisant précéder la découverte d'une activité préparatoire (prévision, puis manipulation pour vérifier et débat, voir scénario 4), nous avons souhaité faciliter le travail de la découverte : ce qui a été acquis collectivement lors de l'activité préparatoire est transposé en travail individuel à une situation proche de la première et contextualisée (construction d'une frise chronologique) ; on retrouve en question 2 des erreurs vraisemblablement rencontrées lors de l'activité préparatoire.

Le scénario complet du manuel assure le lien, difficile à construire spontanément dans la pratique de la classe, entre des situations d'apprentissage élaborées comme le scénario 4 et les situations qui les suivent et les complètent de manière à extraire progressivement le savoir à institutionnaliser. Le rôle du professeur, son appropriation de l'activité, ne sont pas entamées, et sa tâche s'en trouve simplifiée.

Construire des modèles qui permettent d'avoir une prise sur la réalité en faisant évoluer des raisonnements à l'aide du langage écrit est constitutif de l'activité mathématique (et plus généralement scientifique).

Bien entendu, la réalité est toujours bien plus complexe que le modèle et les « modèles » construits à l'école primaire peuvent souvent être confondus avec des « mécanismes à apprendre ». En cela, le terme « modèle » peut paraître prétentieux pour des mathématiciens peu habitués à l'école primaire. Nous l'assumons pleinement. Il ne faut pas perdre de vue que ces mécanismes (dans l'exemple donné : l'addition de deux décimaux) ne le sont que pour les adultes et que nous devons faire en sorte de présenter aux élèves des « mondes nouveaux » plutôt que de leur faire « visiter des monuments ». Dans l'exemple étudié, il appartient au professeur de faire construire l'addition de deux décimaux comme réponse à un problème posé, même si, pour les adultes cette addition est réduite à un automatisme ! Le professeur est metteur en scène et acteur d'une pièce dont lui seul connaît à chaque fois le dénouement !

La construction d'un modèle n'a de place que si l'on a conscience de l'importance de l'anticipation avant l'action, anticipation qui contribue à avoir un certain « pouvoir » sur le réel et qui développe la capacité à prévoir les conséquences des actions projetées avant de les réaliser.

Les élèves, quel que soit leur milieu d'origine, sont en mesure d'accéder au raisonnement logique. Les recherches actuelles développées en sociologie et en didactiques des disciplines tendent à montrer que proposer aux élèves d'origine populaire des contenus moins conceptuels par un enseignement qui procéderait davantage par l'exemple et l'illustration au détriment de l'argumentation et de la démonstration serait un facteur d'accroissement des inégalités.

Nous sommes aussi convaincus qu'une telle démarche apporte un « plus » dans le climat de la classe. De tels efforts d'organisation contribuent à la construction sociale d'un groupe d'individus autour de l'apprentissage de la raison. La raison se construit et les mathématiques peuvent y contribuer.