Sommaire

ISBN: 2 218 92134 0 © Hatier, Paris, 2006

Nombres entiers naturels

Numération chiffrée : position et valeur

Dans notre numération, chaque **chiffre** a une **valeur** différente selon sa **position**.

Exemple :
Dans 4 837, le chiffre 4 signifie 4 mille, et dans 6 342, le chiffre 4 signifie 4 dizaines.

Chaque groupement est dix fois plus grand que celui qui le précède.

×10 ×10 ×10 ×10 ×10 ×10

1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1
unité de millions	centaine de mille	dizaine de mille	unité de mille	centaine	dizaine	unité

Dans le nombre 2 957, le chiffre 5 est le chiffre des dizaines, 295 est le nombre de dizaines.

Numération orale : dire, lire, écrire les nombres

Pour lire un nombre

– **Tu le découpes en tranches de trois chiffres à partir de la droite.**
Chaque tranche correspond à une classe.

Classe des milliards			Classe des millions			Classe des mille					
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u
				2	7	5	8	3	9	3	4
		1	5	3	2	0	4	0	0	8	3

– **Tu lis de gauche à droite** le nombre de chaque classe suivi du nom de la classe, sauf pour la dernière (les unités).

– Le mot « zéro » sert à désigner le nombre 0, mais on ne l'entend jamais quand on dit les autres nombres.

Exemples :
27 583 934 se lit : vingt-sept **millions** cinq cent quatre-vingt-trois **mille** neuf cent trente quatre.
1 532 040 083 se lit : un **milliard** cinq cent trente-deux **millions** quarante **mille** quatre-vingt-trois.

Pour écrire un nombre en lettres

- Lorsqu'ils sont multipliés par un nombre, **vingt** et **cent** prennent un « s », sauf s'ils sont suivis d'un autre nombre :
  Exemples :
  quatre-vingts *mais* quatre-vingt-trois ;
  mille six cents *mais* mille six cent deux.
- On écrit un **trait d'union** entre les dizaines et les unités différentes de un : trente-quatre.
- On écrit **et** entre les dizaines et un (sauf pour quatre-vingt-un) : trente et un.
- **Mille** est invariable.

Pour écrire un nombre en chiffres

– Tu repères les différentes classes.

– Pour chaque classe, tu écris un nombre de trois chiffres, le chiffre 0 indiquant l'absence de certains groupements.
Pour la première tranche à gauche, tu ne mets pas de 0 en tête.

– Tu laisses un espace entre deux classes.

Exemple :
huit cent quarante-sept millions huit cent sept mille quatre cent vingt-six s'écrit :

847 807 426
millions mille

Le 0 indique qu'il n'y a pas de dizaines dans la classe des mille.

Différentes décompositions d'un nombre

Il existe différentes manières d'écrire un même nombre.

- L'écriture **chiffrée** : 1 074 297
- La décomposition **additive** : 1 000 000 + 70 000 + 4 000 + 200 + 90 + 7
- La décomposition **canonique** :
  (1 × 1 000 000) + (7 × 10 000) + (4 × 1 000) + (2 × 100) + (9 × 10) + 7
- La décomposition **auditive** qui traduit la manière de dire les nombres :

(1 × 1 000 000) + [(60 + 14) × 1 000] + (2 × 100) + (4 × 20) + 10 + 7
un million soixante-quatorze mille deux cent quatre-vingt - dix - sept

Comparer des nombres entiers

- **S'ils n'ont pas le même nombre de chiffres**, le nombre le plus grand est celui qui a le plus de chiffres.

Exemple :
45 627 a 5 chiffres et 6 673 a 4 chiffres donc 45 627 > 6 673

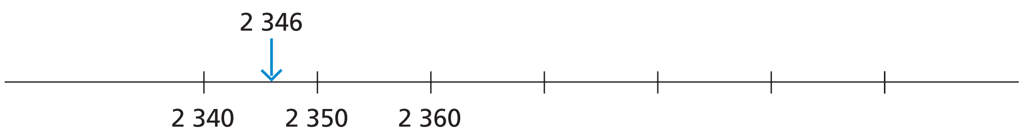
- **S'ils ont le même nombre de chiffres**, tu compares le premier chiffre de chacun en partant de la gauche.
Si ces deux chiffres sont égaux, tu compares les deux suivants, et ainsi de suite.

Exemple :
45 627 et 45 834
6 < 8 donc 45 **6**27 < 45 **8**34
On dit : 45 627 est plus petit que 45 834 ou bien 45 627 est inférieur à 45 834.

Encadrer des nombres

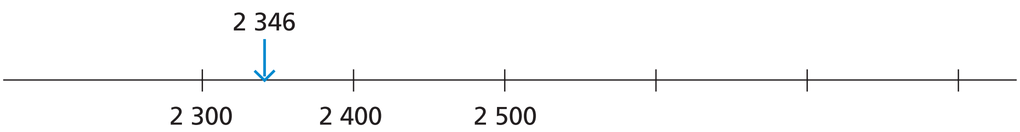
- Tu peux **encadrer un nombre entre deux dizaines consécutives** et le placer sur une droite graduée de 10 en 10.

  Exemple :
  2 340 < 2 346 < 2 350
  2 346 est plus proche de 2 350 que de 2 340 car l'écart entre 2 346 et 2 350 est plus petit que l'écart entre 2 346 et 2 340.

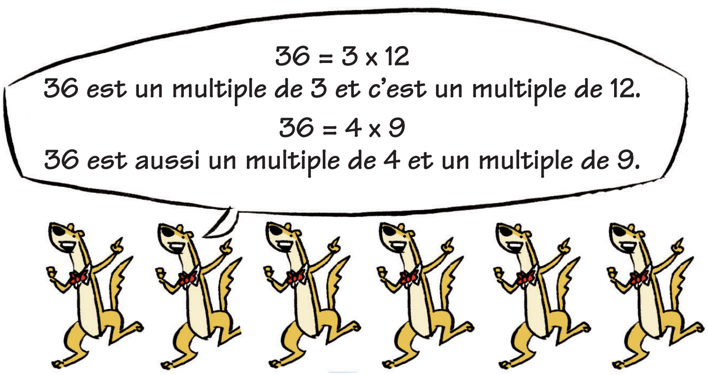


- Tu peux **encadrer un nombre entre deux centaines consécutives** et le placer sur une droite graduée de 100 en 100.

  Exemple :
  2 300 < 2 346 < 2 400
  2 346 est plus proche de 2 300 que de 2 400 car l'écart entre 2 346 et 2 300 est plus petit que l'écart entre 2 346 et 2 400.



Les multiples d'un nombre



En continuant comme le furet, tu peux voir que 36 est un multiple de 1, de 2, de 3, de 4, de 6, de 9, de 12, de 36.

- **Les multiples de 10** se terminent par 0.
  Exemple : 540 est un multiple de 10, c'est 10 × 54.
- **Les multiples de 100** se terminent par 00.
  Exemple : 900 est un multiple de 100, c'est 100 × 9.
- **Les multiples de 2** sont les nombres pairs, ils se terminent par 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.
  Les nombres entiers qui ne sont pas des nombres pairs sont appelés des nombres impairs.
- **Les multiples de 5** se terminent par 0 ou 5.

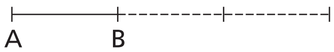
Fractions et nombres décimaux

Utiliser les fractions

Les nombres entiers ne suffisent pas pour exprimer avec précision des mesures de longueur, d'aire ou d'autres grandeurs.
Les fractions sont des nombres qui permettent d'être plus précis.

Pour donner la mesure d'une longueur

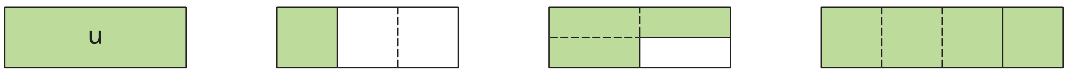
u est l'unité de longueur



le segment [AB] mesure $\frac{1}{3}$ u $\quad 3 \times \frac{1}{3}$ u = 1 u

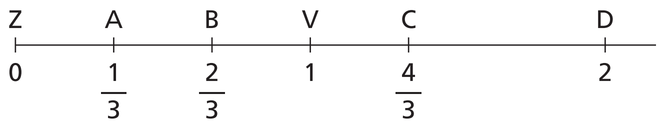
le segment [CD] mesure $\frac{2}{3}$ u $\quad \frac{2}{3}$ u + $\frac{1}{3}$ u = 1 u

Pour donner la mesure d'une aire



1 unité	$\frac{1}{3}$ u	$\frac{3}{4}$ u	$\frac{4}{3}$ u
	$3 \times \frac{1}{3}$ u = 1 u	$\frac{3}{4}$ u + $\frac{1}{4}$ u = 1 u	$\frac{4}{3}$ u = 1 u + $\frac{1}{3}$ u

Pour donner la position de points sur la droite graduée



L'origine de la graduation est le point Z.
Le point V est à 1 u de Z car la mesure de la longueur de [ZV] est 1.
Le point A est à $\frac{1}{3}$ u de Z. Le point B est à $\frac{2}{3}$ u de Z. Le point C est à $\frac{4}{3}$ u de Z.

Lire les fractions

numérateur

$\frac{4}{3}$ est une fraction

dénominateur

$\frac{1}{2}$ se lit « **un demi** »

$\frac{1}{3}$ se lit « **un tiers** »

$\frac{1}{4}$ se lit « **un quart** »

$\frac{1}{5}$ se lit « **un cinquième** »

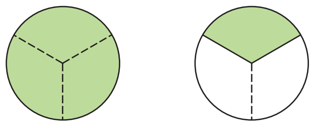
$\frac{1}{10}$ se lit « **un dixième** »

$\frac{27}{100}$ se lit « **vingt-sept centièmes** »

Comprendre ce que représente une fraction

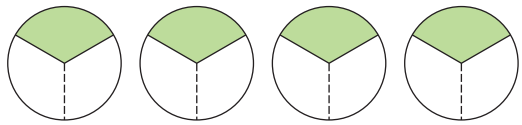
- **$\frac{4}{3}$ c'est $1 + \frac{1}{3}$**

On partage équitablement l'unité en 3 et on prend 4 parts.



$$\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

- **$\frac{4}{3}$ c'est aussi 4 unités partagées équitablement en 3.**



$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$$

Remarques

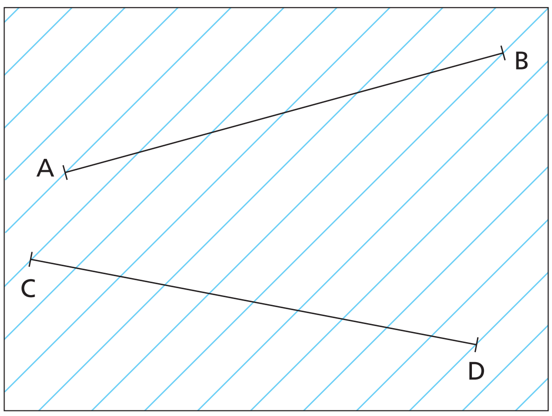
- Une fraction est inférieure à 1 ou bien égale à 1 ou bien supérieure à 1.

Exemples : $\frac{4}{6} < 1$ $\quad \frac{6}{6} = 1$ $\quad \frac{7}{6} > 1$ car $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$

- Certaines fractions sont égales :

Exemples : $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\quad \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

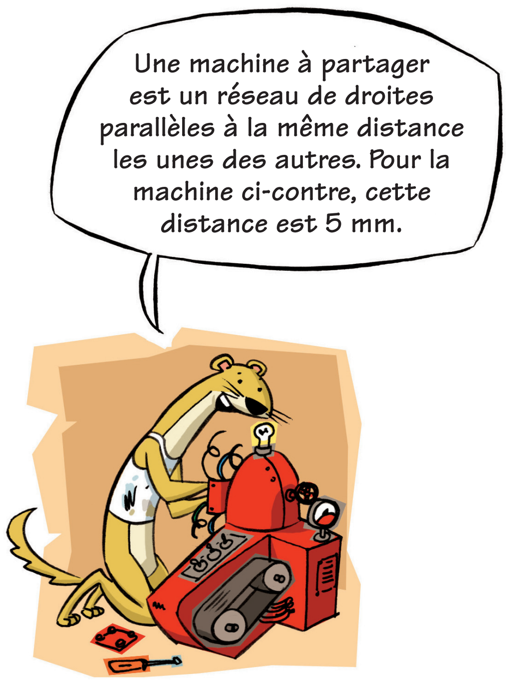
Partager équitablement un segment unité



Pour partager équitablement le segment unité, on peut utiliser une « machine à partager ».

Le segment [AB] est partagé en 6 segments de même longueur.

Le segment [CD] est partagé en 10 segments de même longueur.



Fractions et nombres entiers

$$\frac{4}{3} = \underbrace{1}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{rompu}} \qquad 1 < \frac{4}{3} < 2$$

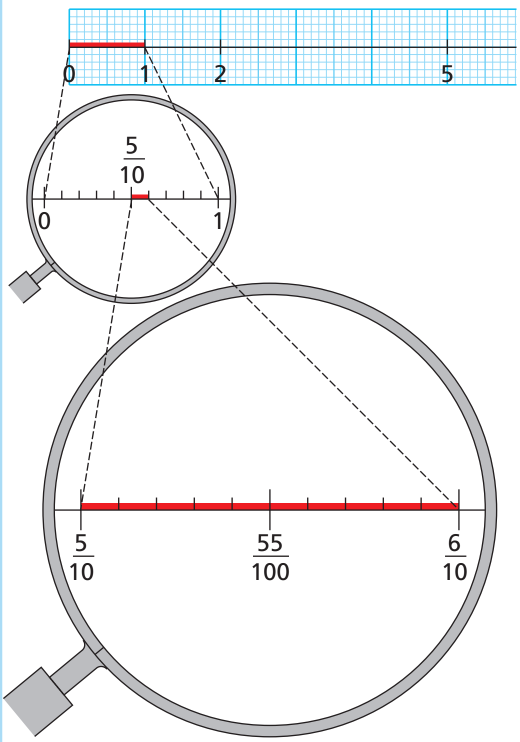
- On appelle **rompu** une fraction plus petite que l'unité :

$\frac{1}{3}$ est le « rompu » car on a rompu une unité.

- Certaines fractions sont **égales à des nombres entiers** :

$\frac{3}{3} = 1$ $\qquad \frac{6}{3} = 2$ $\qquad \frac{70}{10} = 7$ $\qquad \frac{6}{6} = 1$

Fractions décimales



Les fractions dont le dénominateur est 10, 100, 1 000… sont appelées des fractions décimales.

- Quand on partage l'unité en 10 parties égales, chaque partie est égale à **un dixième** : $\frac{1}{10}$

10 dixièmes, c'est l'unité : $10 \times \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$

- Quand on partage l'unité en 100 parties égales, chaque partie est égale à **un centième** : $\frac{1}{100}$

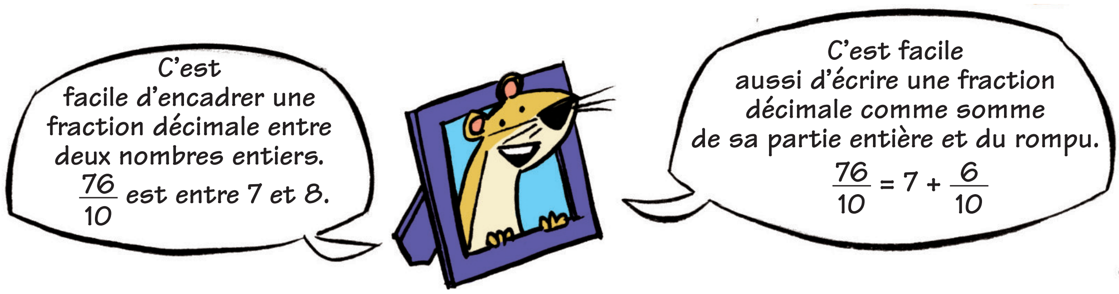
100 centièmes, c'est l'unité : $100 \times \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1$

10 centièmes égalent un dixième : $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

- Quand on partage l'unité en 1 000 parties égales, chaque partie est égale à **un millième** : $\frac{1}{1\,000}$

1 000 millièmes, c'est l'unité : $1\,000 \times \frac{1}{1\,000} = 1$

10 millièmes égalent un centième : $\frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100}$



Fractions décimales et nombres décimaux

- On peut écrire les fractions décimales sous la forme de **nombres décimaux**.

100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$
centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes
	4	8	,	5	6	

$$\frac{4\,856}{100} = 48 + \frac{56}{100} = 48 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} = 48{,}56$$

c'est la partie entière de 48,56 — c'est la partie décimale de 48,56

On lit « quarante-huit et cinquante-six centièmes »
ou « quarante-huit virgule quarante-six centièmes ».

La **virgule** sépare les unités des dixièmes.

- On peut **écrire un nombre décimal de différentes façons**.
  Exemple :

$$325{,}072 = \frac{325\,072}{1\,000} = 325 + \frac{72}{1\,000} = 325 + \frac{7}{100} + \frac{2}{1\,000}$$
$$= 325 + 0{,}07 + 0{,}002$$
$$= (3 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1) + (7 \times 0{,}01) + (2 \times 0{,}001)$$

- **Entre deux nombres décimaux, on peut toujours en trouver un troisième**…
et même beaucoup plus !
  Exemple : entre 12,4 et 12,5 on peut trouver 12,41 ; on peut trouver aussi 12,417 ; etc.

Comparer des nombres décimaux

- **Si les nombres ont des parties entières différentes**, le plus petit est celui qui a la plus petite partie entière : 745,023 < 830,49

- **Si les nombres ont la même partie entière**, on compare les chiffres après la virgule en commençant par les dixièmes :
5,**2**67 < 5,**4** car 2 dixièmes est plus petit que 4 dixièmes ;
2,4**7**9 < 2,4**8** car 7 centièmes est plus petit que 8 centièmes.

Calcul

L'addition et la soustraction

Pour effectuer des additions ou des soustractions, on peut utiliser plusieurs méthodes en fonction des nombres en jeu.

Calculer mentalement

Exemples : 465 + 300 743 – 200 3,5 + 0,2 2,7 +… = 4

Faire des sauts sur la droite en décomposant le deuxième terme

3 476 + 342 = 3 476 + 300 + 40 + 2

$3\,476 \xrightarrow{+\,300} 3\,776 \xrightarrow{+\,40} 3\,816 \xrightarrow{+\,2} 3\,818$

3 476 + 342 = 3 818

6 743 – 428 = 6 743 – 400 – 20 – 8

$6\,743 \xrightarrow{-\,400} 6\,343 \xrightarrow{-\,20} 6\,323 \xrightarrow{-\,8} 6\,315$

6 743 – 428 = 6 315

7,8 + 3,5 = 7,8 + 3 + 0,2 + 0,3

$7{,}8 \xrightarrow{+\,3} 10{,}8 \xrightarrow{+\,0{,}2} 11 \xrightarrow{+\,0{,}3} 11{,}3$

7,8 + 3,5 = 11,3

15,6 – 7,2 = 15,6 – 7 – 0,2

$15{,}6 \xrightarrow{-\,7} 8{,}6 \xrightarrow{-\,0{,}2} 8{,}4$

15,6 – 7,2 = 8,4

Poser l'opération en colonne

Addition

• **Calcul avec les nombres entiers**

Tu dois placer les nombres les uns sous les autres, en alignant en colonnes les chiffres d'un même rang.

	2	1	1	
	4	6	7	3
+		8	9	7
+		9	0	4
	6	4	7	4

4 673 + 897 + 904 = 6 474

• **Calcul avec les nombres décimaux**

Tu dois placer les virgules les unes sous les autres.

	1			
	1	,	4	5
+	2	,	7	
	4	,	1	5

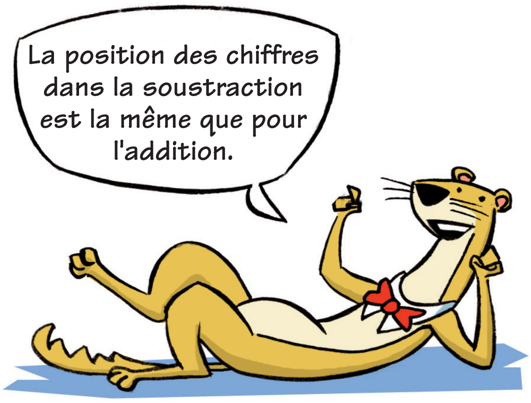
1,45 + 2,7 = 4,15

Soustraction

• **Le résultat d'une soustraction ne change pas quand on ajoute un même nombre à ses deux termes.**

Exemple : 756 – 88 = (756 + 12) – (88 + 12) = 768 – 100 = 668

On utilise cette propriété dans les soustractions en colonnes à retenues.



• **Calcul avec les nombres entiers**

Tu soustrais les chiffres **de même rang** en ajoutant si nécessaire le même nombre aux deux termes de la soustraction (les retenues).

	6	10+3	10+4	10+7
–	1	1+4	1+7	9
	5	8	6	8

6347 – 479 = 5 868

• **Calcul avec les nombres décimaux**

En te calant sur la virgule, tu soustrais les chiffres de même rang en ajoutant si nécessaire le même nombre aux deux termes de la soustraction (les retenues).

Ici, tu remplaces 13,6 par 13,60.

1	10+3	,	6	10+0
1	8	,	1+3	5
	5	,	2	5

13,6 – 8,35 = 5,25

• Il revient au même de :
– soustraire 479 à 6 347,
– chercher quel nombre ajouter à 479 pour atteindre 6 347.

Pour vérifier le résultat d'une soustraction, on peut donc effectuer une addition.

Exemples :
pour vérifier que 6 347 – 479 = 5 868 on calcule 5 868 + 479 = 6 347
et pour vérifier que 13,6 – 8,35 = 5,25 on calcule 8,35 + 5,25 = 13,60.

La multiplication et la division

La table de Pythagore de la multiplication

Tu dois savoir par cœur les produits de la **table de Pythagore**.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dans une multiplication, on peut permuter les deux nombres.
Exemple : $3 \times 7 = 7 \times 3$

Calcul réfléchi pour la multiplication

- Pour **multiplier un nombre entier par 10**, il suffit d'écrire un zéro à la droite du nombre.
  Exemple : $34 \times 10 = 340$

Pour **multiplier un nombre entier par 100**, il suffit d'écrire deux zéros à la droite du nombre.
Exemple : $34 \times 100 = 3\,400$

- 9×40 c'est 9 fois 4 dizaines, c'est aussi 36 dizaines, soit 360 :

$9 \times 40 = (9 \times 4) \times 10 = 360$

- 7×600, c'est 7 fois 6 centaines, c'est aussi 42 centaines, soit 4 200 :

$7 \times 600 = (7 \times 6) \times 100 = 4\,200$

- Pour effectuer un produit, on peut **décomposer** un des nombres.
  Exemple : 34×12 c'est $(34 \times 10) + (34 \times 2)$
  $34 \times 12 = 340 + 68 = 340 + 60 + 8 = 408$

- N'oublie pas :

– multiplier par 2, c'est **doubler** ;
– multiplier par 3, c'est **tripler** ;
– multiplier par 4, c'est **quadrupler**, c'est aussi doubler et encore doubler.

Multiplication de deux nombres entiers : technique

- Pour calculer le produit de 369 par 48, on peut écrire :

$369 \times 48 = 369 \times (40 + 8) = (369 \times 40) + (369 \times 8)$
$= 14\,760 + 2\,952 = 17\,712$

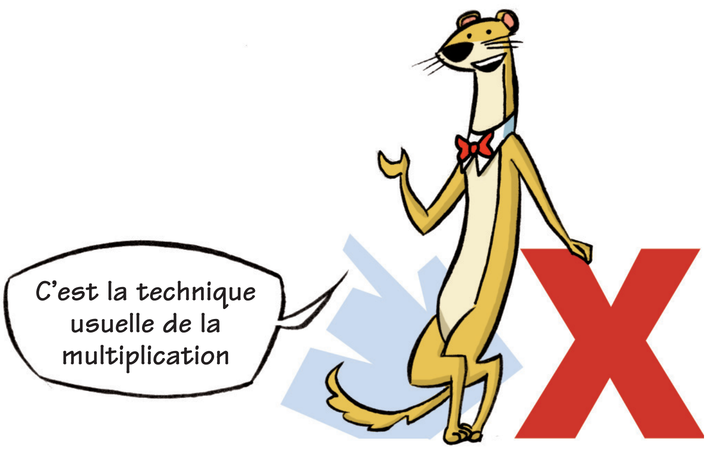
17 712 est le produit de 369 par 48.

Cette propriété est utilisée dans ces deux techniques :

	300	60	9	
40	40 x 300 = 12 000	40 x 60 = 2 400	40 x 9 = 360	→ 14 760 = 369 x 40
8	8 x 300 = 2 400	8 x 60 = 480	8 x 9 = 72	→ 2 952 = 369 x 8

369 x 48 = 14 760 + 2 952 = 17 712

		3	6	9	
x			4	8	
	2	9	5	2	← 8 x 369
1	4	7	6	0	← 40 x 369
1	7	7	1	2	← 369 x 48



Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier

- Pour multiplier un décimal par un nombre entier, on calcule comme s'il s'agissait de deux nombres entiers puis on place la virgule en étant attentif à bien repérer la place des unités dans le produit effectué.

Exemple :
Pour effectuer 3,45 par 17 tu effectues le produit de 345 centièmes par 17.
Tu obtiens 5 865 centièmes c'est-à-dire 58,65.

	3	4	5
x		1	7
2	4	1	5
3	4	5	0
5	8	6	5

c'est-à-dire

	3 ,	4	5
x		1	7
2	4	1	5
3	4	5	0
5	8 ,	6	5

Division de deux nombres entiers : technique

- Quand on divise 942 par 27, le **dividende** est 942 et 27 est le **diviseur**.
Le nombre de fois où 27 est contenu dans 942 s'appelle le **quotient**.

Exemple : calculer « 942 divisé par 27 ».

- **On cherche le nombre de chiffres du quotient.** Pour cela, on multiplie le diviseur par 10, 100, 1 000… pour encadrer le dividende :
$27 \times 10 < 942 < 27 \times 100$.

Le quotient est compris entre 10 et 100.
Ce sera un nombre de 2 chiffres.

- **On construit le répertoire du diviseur.**

$27 \times 1 = 27$
$27 \times 2 = 54$
$27 \times 3 = 81$
$27 \times 4 = 108$
$27 \times 5 = 135$
$27 \times 6 = 162$
$27 \times 7 = 189$
$27 \times 8 = 216$
$27 \times 9 = 243$

- **On pose la division.**

```
  9 4 2 | 2 7
– 8 1 0 | 3 .  .
  1 3 2 |
```

Le chiffre des dizaines est 3
car $30 \times 27 = 810$
(40×27 est trop grand)

```
  9 4 2 | 2 7
– 8 1 0 | 3 4
  1 3 2 |
– 1 0 8 |
    2 4 |
```

Le chiffre des unités est 4
car $4 \times 27 = 108$
(5×27 est trop grand)

Le quotient est 34 et le reste est 24.
Le **reste** d'une division est toujours inférieur au diviseur : $24 < 27$.

- **On écrit l'égalité qui traduit la division :** $942 = (27 \times 34) + 24$.
Elle permet de vérifier le résultat de la division en calculant : $(27 \times 34) + 24$.

```
9 4 2 | 2 7     dividende
. . . | 3 4     diviseur      942 = (27 × 34) + 24
. . . |         quotient
. . . |         reste
  2 4 |
```

Quotient entier, quotient décimal exact, quotient décimal approché

1. Peut-on partager équitablement 395 € entre 5 personnes ?

2. Peut-on partager équitablement 395 € entre 4 personnes ?

3. Peut-on partager équitablement 395 € entre 7 personnes ?

1

$$\begin{array}{rrrr|l} & 3 & 9 & 5 & 5 \\ \cline{5-5} - & 3 & 5 & 0 & 7\ 9 \\ \cline{2-4} & & 4 & 5 & \\ - & & 4 & 5 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

$395 = 5 \times 79$

- On peut partager équitablement 395 € entre 5 personnes.
- Cela fait 79 € par personne.
- $395 = 5 \times 79$

quotient entier

2

$$\begin{array}{rrrr|l} & 3 & 9 & 5 & 4 \\ \cline{5-5} - & 3 & 6 & 0 & 9\ 8 \\ \cline{2-4} & & 3 & 5 & \\ - & & 3 & 2 & \\ \cline{2-4} & & & 3 & \end{array}$$

$395 = (4 \times 98) + 3$

- Il reste 3 € soit 300 centimes.
- On peut partager 300 c entre 4 personnes : cela fait 75 c par personne.
- On peut partager équitablement 395 € entre 4 personnes.
- Cela fait 98,75 € par personne.
- $395 = 4 \times 98{,}75$

quotient décimal exact

3

$$\begin{array}{rrrr|l} & 3 & 9 & 5 & 7 \\ \cline{5-5} - & 3 & 5 & 0 & 5\ 6 \\ \cline{2-4} & & 4 & 5 & \\ - & & 4 & 2 & \\ \cline{2-4} & & & 3 & \end{array}$$

$395 = (7 \times 56) + 3$

- Tape 395 ÷ 7 sur ta calculatrice. Tu obtiens : 56.42857143
- 56,42 est le quotient décimal approché à 0,01 près.
- $395 = (7 \times 56{,}42) + 0{,}06$
- On peut donner 56,42 € par personne et il reste 6 c.

quotient décimal approché

La calculatrice

Effectuer des opérations sur des nombres entiers

- Pour calculer 348 + 2 654 on tape successivement sur les touches :

3 4 8 + 2 6 5 4 = on lit sur l'écran : 3002

- Pour calculer 4 732 – 798 on tape :

4 7 3 2 – 7 9 8 = on lit sur l'écran : 3934

- Pour calculer 347 × 26 on tape :

3 4 7 × 2 6 = on lit sur l'écran : 9022

- Pour trouver le quotient et le reste de la division de 243 par 17

si on tape successivement les touches :

2 4 3 ÷ 1 7 = on lit sur l'écran : 14.29411765

Le quotient entier est 14.

Pour trouver le reste, il faut d'abord calculer :
14 × 17 = 238 puis 243 – 238 = 5.
On conclut : 243 = (14 × 17) + 5.

Effectuer des opérations avec les nombres décimaux

Sur les calculatrices, la virgule est remplacée par un point.

Pour calculer : 476,26 + 69,85 on tape :

4 7 6 . 2 6 + 6 9 . 8 5 =

on lit : 546.11

et on écrit : 546,11.

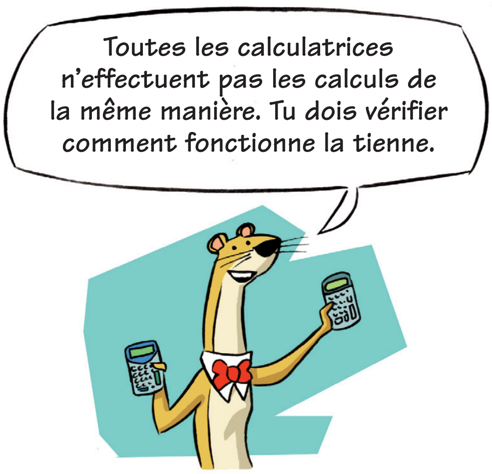
Effectuer une suite d'opérations en ligne

Pour calculer : 6 + (4 × 7) = 34, si on tape :

6 + 4 × 7 =

– certaines calculatrices affichent 70 ;
elles calculent d'abord (6 + 4)
et elles multiplient le résultat par 7.
Dans ce cas, tu dois d'abord effectuer
le calcul qui est entre parenthèses,
ici la multiplication (4 × 7),
et ajouter 6 au résultat trouvé.

– d'autres calculatrices affichent 34,
ce qui est le résultat attendu ;
elles effectuent en premier les multiplications
(ou les divisions).



Exploitation de données numériques

Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations

Pour résoudre un problème, tu dois :

– **lire** attentivement l'énoncé, essayer de bien **comprendre** ce dont il est question,
– **faire des hypothèses**, les tester, faire des essais et les contrôler,
– **vérifier** que ta solution tient compte de toutes les contraintes,
– **recommencer** si nécessaire.

Ensuite tu **rédiges** la (ou les) solution(s) que tu as trouvée(s) et tu expliques comment tu as fait pour trouver.

Approche de la proportionnalité

• Dans certains problèmes, tu étudies des **relations entre des grandeurs**.

Ces relations sont parfois du domaine de la multiplication ou de la division :

– **entre des quantités et des prix.**
On sait que 4 boîtes de thé coûtent 18 €. Quel est le prix de 6 boîtes de thé ?

– **entre des quantités et des grandeurs.**
Pour faire des crêpes pour 4 personnes il faut 200 g de farine, 0,5 L de lait et 2 œufs.
Quelles quantités de farine, de lait et d'œufs sont nécessaires pour 10 personnes ?

– **entre des grandeurs de même nature.**
On agrandit une figure géométrique : ce qui mesure 4 cm sur le modèle doit mesurer 6 cm sur la figure agrandie.
Quelle sera la longueur du segment correspondant à un segment de 10 cm sur le modèle ?

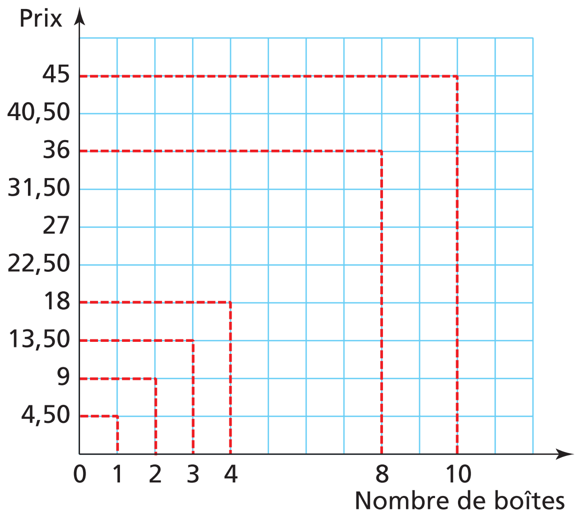
– etc.

Toutes les situations où des grandeurs sont liées par une relation multiplicative sont appelées situations de proportionnalité et on dit que ces grandeurs sont proportionnelles.

• On peut **organiser les données** dans un tableau et construire le graphique correspondant.

Exemple :
On sait que 4 boîtes de thé valent 18 €,
on peut trouver le prix en fonction du nombre de boîtes.

Nombre de boîtes	Prix en €
4	18
2	9
1	4,50
2 + 1	13,50
8	36
10	45

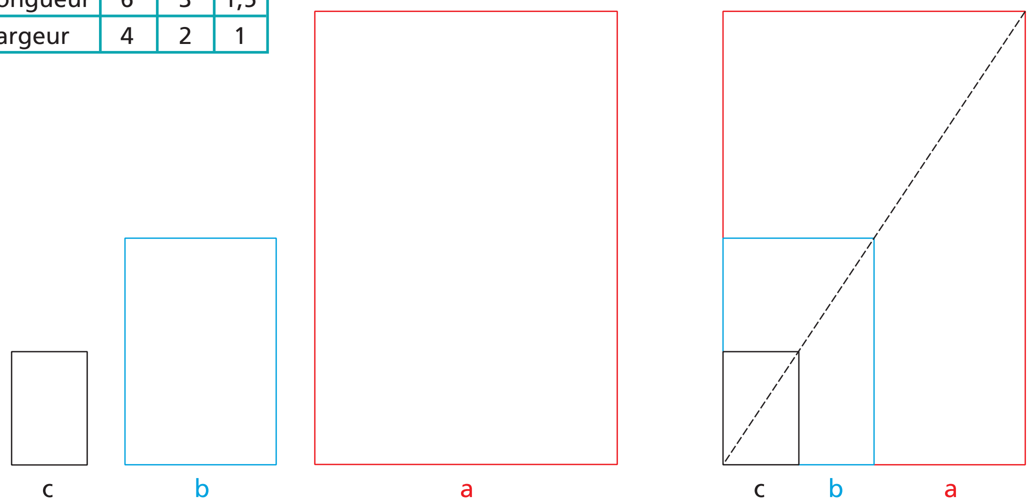


Proportionnalité et géométrie

Si tu agrandis ou réduis une figure donnée, tu peux observer que :
– les angles sont conservés,
– les longueurs sont proportionnelles.

Exemple :

	Rectangles		
	a	b	c
Longueur	6	3	1,5
Largeur	4	2	1



Proportionnalité et pourcentages

• L'expression « **20 pour cent** » se note 20 %.

20% de réduction signifie que pour un achat de 100 euros, on paiera 20 euros de moins, soit 80 euros.

20 % d'augmentation signifie que pour un achat de 100 euros, on paiera 20 euros de plus, soit 120 euros.

• Calculer 20 % d'un nombre, c'est calculer les $\frac{20}{100}$ de ce nombre.

Il suffit pour cela :
– soit de multiplier ce nombre par 20 puis de diviser le résultat par 100 ;
– soit de diviser ce nombre par 100 puis de multiplier le résultat obtenu par 20 ;
– soit de multiplier ce nombre par 0,20.

Les échelles

• On dit qu'une carte est représentée **à l'échelle « un vingt-cinq millièmes »**, lorsque 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité, soit 250 m.

Pour indiquer l'échelle, on écrit : 1/25 000 ou 1 : 25 000 ou $\frac{1}{25\,000}$

• On dit qu'une photo est **à l'échelle « × 1 000 »** lorsque les dimensions réelles de ce qu'elle représente sont 1 000 fois plus petites que celles de la photo.
1 cm sur la photo représente 0,001 cm en réalité.

Représentation de données numériques

Pour présenter des données numériques, on peut utiliser un **tableau**, un **graphique**, un **diagramme** en bâtons ou un diagramme circulaire (appelé aussi camembert).

Exemple 1 : Répartition des activités d'un élève de CM2 pendant une journée (24 h)

Tableau

Travail en classe	Repas	Sommeil	Activités extra-scolaires	Autres
6 h	2 h	10 h	1 h	5 h

Diagramme en bâtons

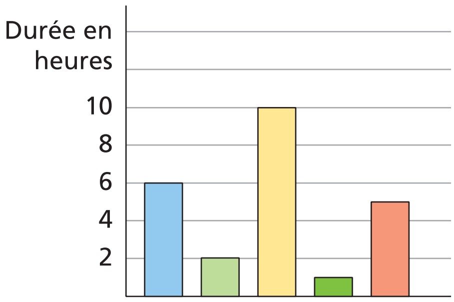
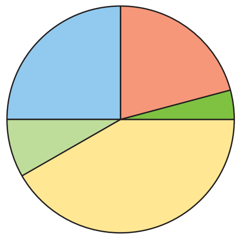


Diagramme circulaire



Travail en classe
Repas
Sommeil
Activités extra-scolaires
Autres

L'axe des durées est gradué régulièrement. La hauteur d'un bâton représente la durée de l'activité correspondante.

Chaque angle de secteur est proportionnel à la durée de l'activité :

6 heures, c'est $\frac{1}{4}$ de 24 heures.

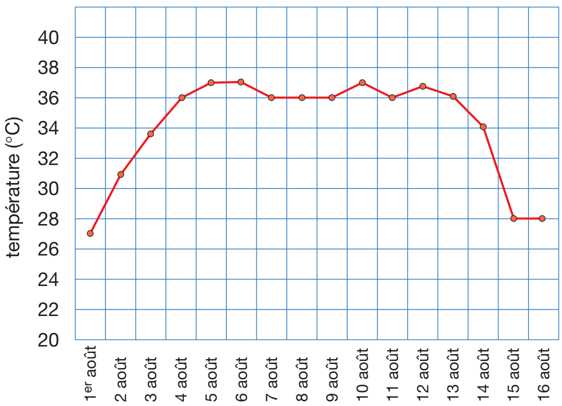
Exemple 2 : Les températures maximales en France début août 2003.

Tableau

Date	Température en degré Celsius
1 août	27°
3 août	34°
5 août	37°
7 août	36°
9 août	36°
11 août	36°
13 août	36°
15 août	28°

Le tableau donne le relevé des températures maximales un jour sur deux.

Graphique



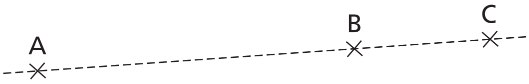
Les points indiquent les températures maximales journalières.

Espace et géométrie

Relations et propriétés

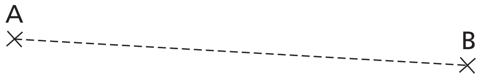
Alignement

On dit que trois points ou plus sont « **alignés** » lorsqu'ils sont sur une même droite.



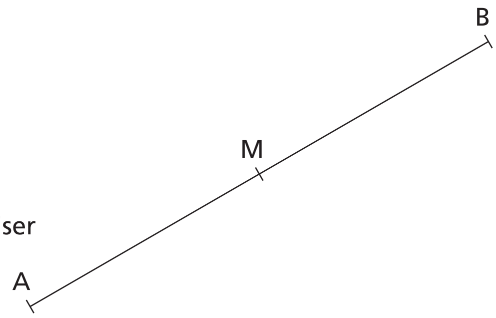
Distance de deux points A et B

C'est la **longueur** du segment [AB].



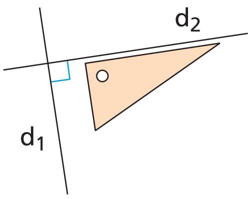
Milieu d'un segment [AB]

Il existe un point qui est à la même distance des points A et B et qui est aligné avec eux, c'est le **milieu du segment [AB]**.
Pour trouver le milieu d'un segment, on peut utiliser une bande de papier et la plier en deux.
On peut aussi utiliser une règle graduée.



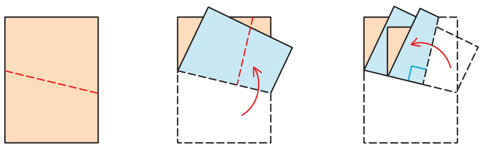
Angles droits et droites perpendiculaires

Pour reconnaître ou construire un angle droit, on utilise une **équerre**.



Les droites d_1 et d_2 sont **perpendiculaires**.

Tu peux facilement fabriquer une équerre avec une feuille de papier.

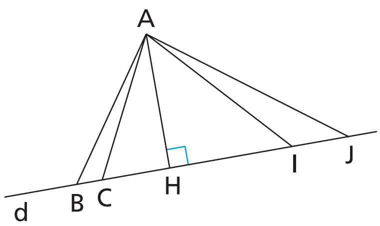


pliage quelconque

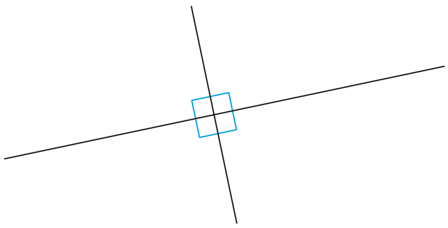
pliage pliure sur pliure

Distance d'un point à une droite, droites perpendiculaires

Le segment [AH] est **perpendiculaire** à la droite d.
AH est la longueur la plus courte pour aller du point A à la droite d.
AH est la **distance** du point A à la droite d.

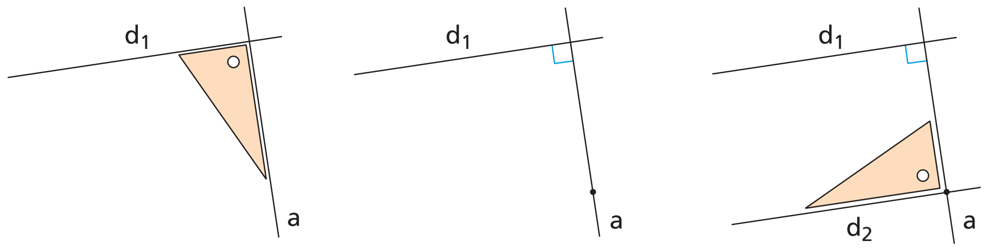


Deux droites perpendiculaires forment 4 angles droits.

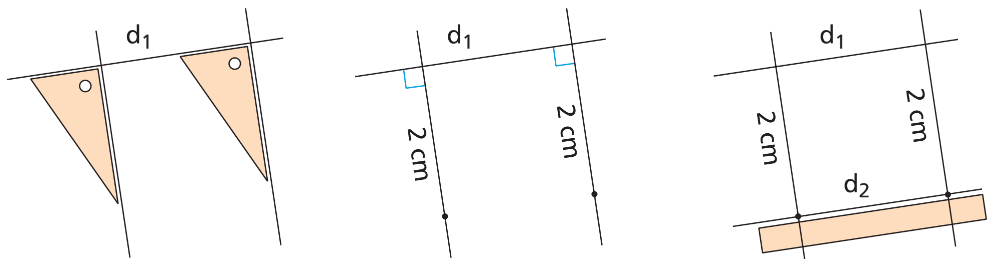


Droites parallèles

- Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** parce qu'elles sont **toutes les deux perpendiculaires** à la droite a.

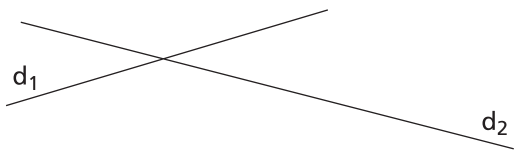


- Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** parce que **la distance qui les sépare est toujours la même**.



Droites sécantes

Deux droites qui se coupent s'appellent des **droites sécantes**.



d_1 et d_2 sont deux droites sécantes.

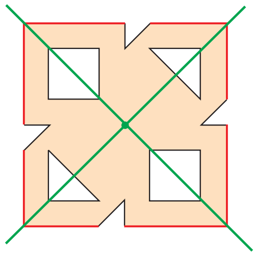
Reconnaître des propriétés géométriques

Il est très utile de **repérer à l'œil** des propriétés géométriques, mais c'est parfois trompeur.

Il faut **vérifier** les propriétés repérées **avec des instruments adaptés** :
– la **règle** pour les alignements ;
– l'**équerre** pour les angles droits ;
– le **compas** pour reporter la distance entre deux points ;
– la **règle graduée** ou le pliage d'une bande de papier pour repérer le milieu d'un segment.

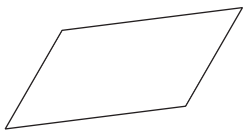
Symétrie par rapport à un axe

- Une figure possède un **axe de symétrie** si, quand on la plie suivant cet axe, les deux parties sont exactement superposables.

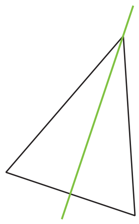


- Une figure géométrique peut ne **pas** avoir **d'axe de symétrie**, en avoir **un** ou en avoir **plusieurs**.

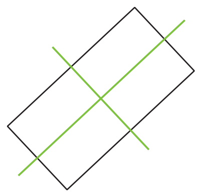
Un parallélogramme
pas d'axe de symétrie



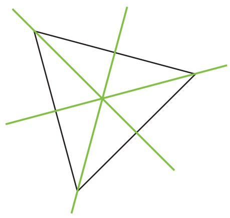
Un triangle isocèle
1 axe de symétrie



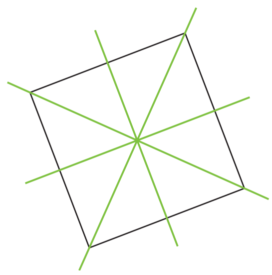
Un rectangle
2 axes de symétrie



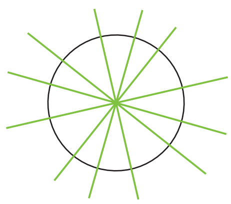
Un triangle équilatéral
3 axes de symétrie



Un carré
4 axes de symétrie

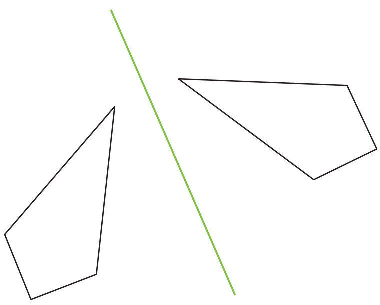


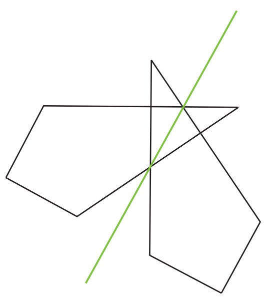
Un cercle
une infinité d'axes de symétrie

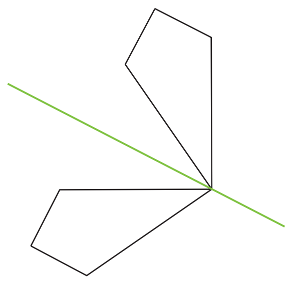


- **Pour compléter ou construire une figure par symétrie par rapport à un axe,** on peut utiliser le pliage, le papier calque, le quadrillage.

L'axe de symétrie peut prendre des orientations variées.





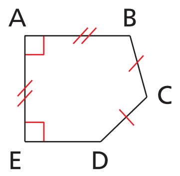


Figures planes

Pour désigner les points d'une figure on utilise des lettres.

Pour indiquer que deux segments ont la même longueur, on met souvent le même petit signe (/ ou //) et pour les angles droits, on met souvent le signe ⌝.

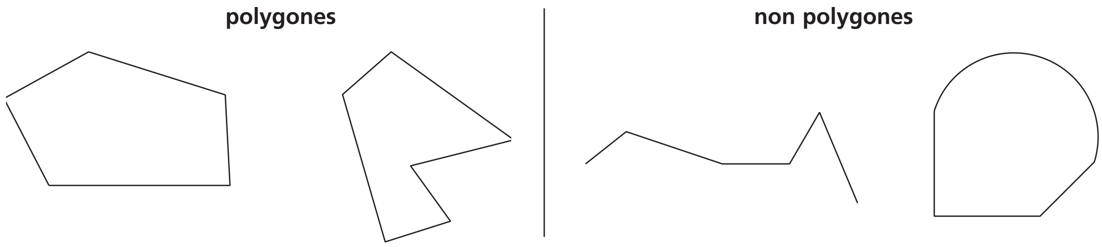
Souvent aussi, on inscrit sur la figure ses dimensions réelles.



Les polygones

Un polygone est une **figure plane fermée** dont le contour est constitué de segments.

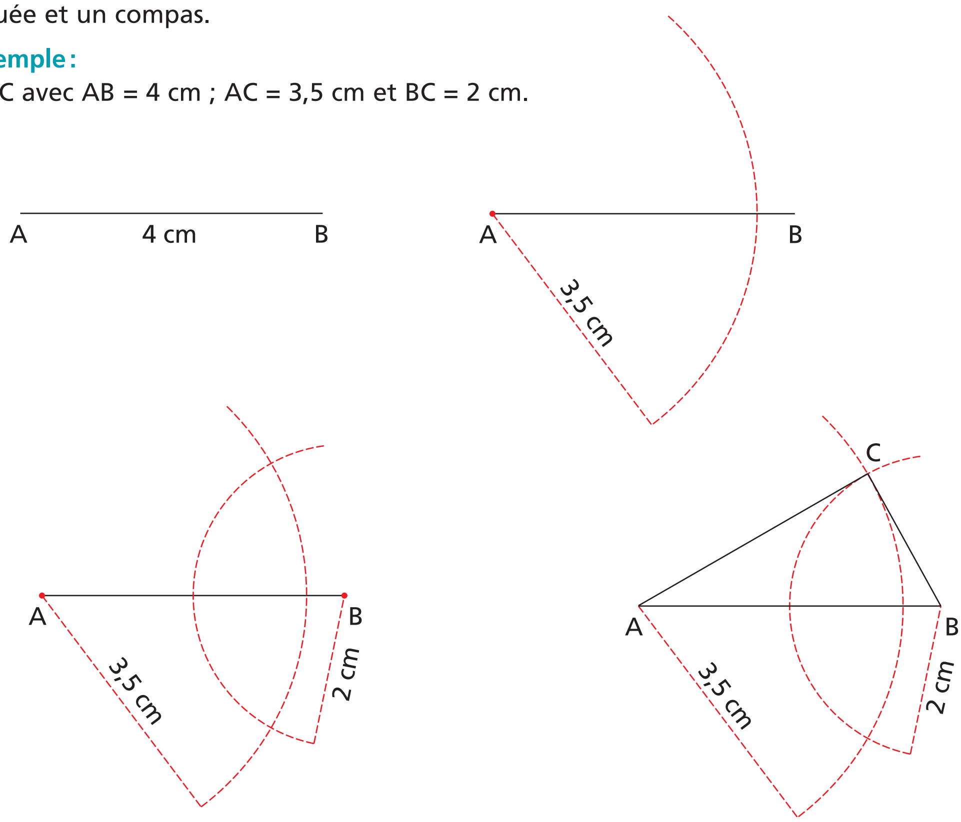
polygones | **non polygones**



Les triangles

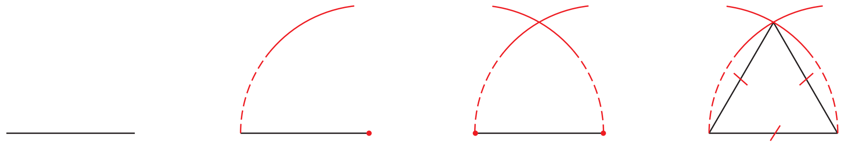
• **Un triangle est un polygone qui a trois côtés.**
Pour construire un triangle dont on connaît la mesure des trois côtés, on utilise une règle graduée et un compas.

Exemple :
ABC avec AB = 4 cm ; AC = 3,5 cm et BC = 2 cm.

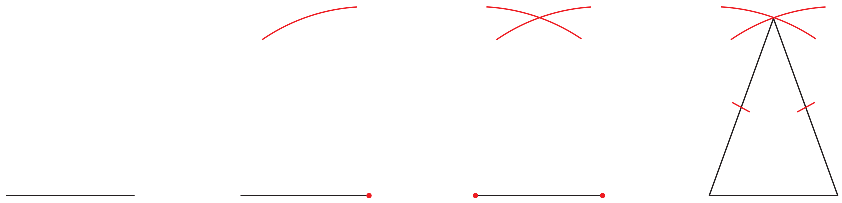


- Certains triangles sont particuliers

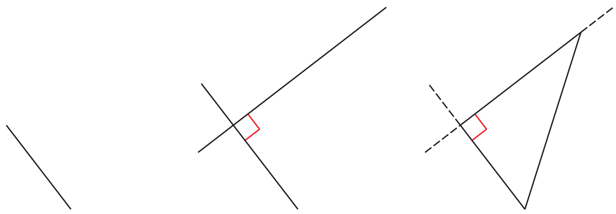
Un **triangle équilatéral** a trois côtés égaux.



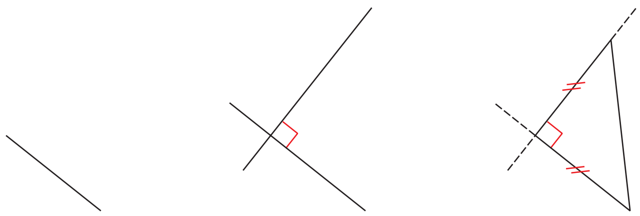
Un **triangle isocèle** a deux côtés égaux.



Un **triangle rectangle** a un angle droit.

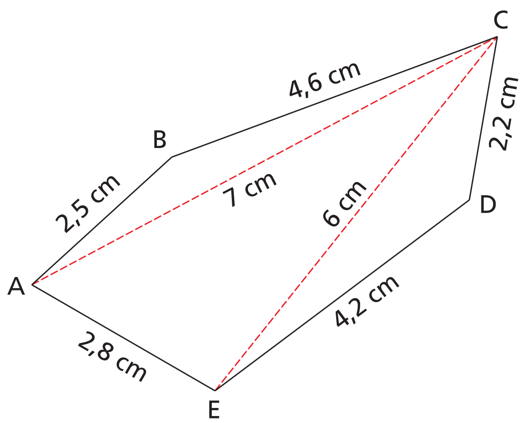


Un **triangle rectangle isocèle** a deux côtés égaux et un angle droit.



- Quand on sait construire un triangle, on sait construire n'importe quel polygone en le décomposant en triangles.

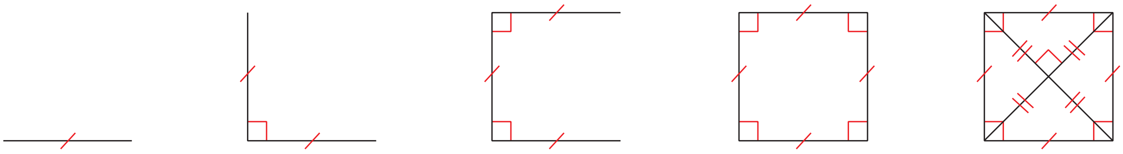
Exemple :
Pour construire le polygone ABCDE, il suffit de construire les triangles ABC, ACE et CDE.



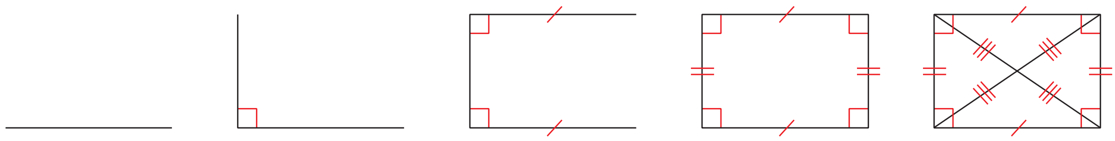
Les quadrilatères

Un quadrilatère est un polygone qui a quatre côtés et quatre sommets.

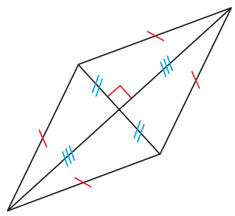
- Un **carré** a 4 angles droits et 4 côtés égaux.
Ses diagonales se coupent en leur milieu ; elles sont perpendiculaires.

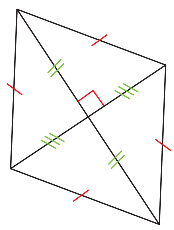


- Un **rectangle** a 4 angles droits. Ses côtés sont égaux 2 à 2.
Ses diagonales se coupent en leur milieu ; elles sont égales.

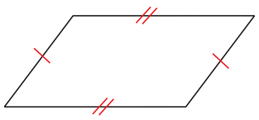


- Un **losange** a 4 côtés égaux.
Ses diagonales se coupent en leur milieu ; elles sont perpendiculaires.
On peut tracer des losanges différents avec des côtés de même longueur.

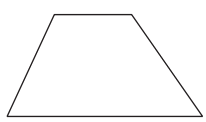




- Un **parallélogramme** a 2 paires de côtés parallèles et de même longueur.



- Un **trapèze** a 2 côtés parallèles.

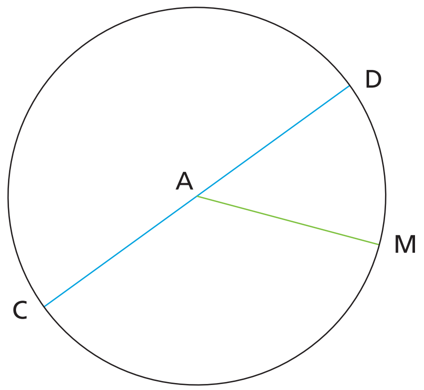


Le cercle

Tous les points qui sont à une même distance d'un point A sont sur un cercle de centre A.

Pour tracer un cercle, on utilise un **compas** :
– l'écartement du compas donne le **rayon** du cercle ;
– le point où on pique la pointe sèche est le **centre** du cercle.

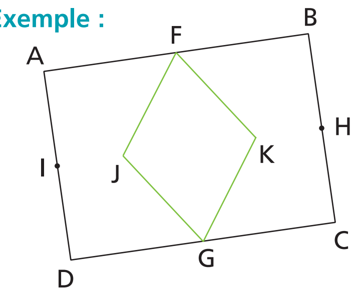
Le segment [AM] est un **rayon** du cercle, sa longueur est le rayon du cercle.
Le segment [CD] est un **diamètre** du cercle, sa longueur est le diamètre du cercle.
Le diamètre est le double du rayon.



Décrire, reproduire, construire des figures

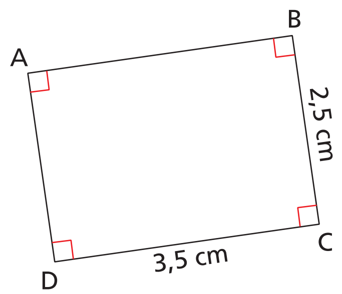
Pour décrire, reproduire ou construire des figures complexes, on peut chercher à repérer :
– des alignements ;
– des milieux ;
– des angles droits ;
– des droites parallèles ;
– des figures usuelles.

Exemple :

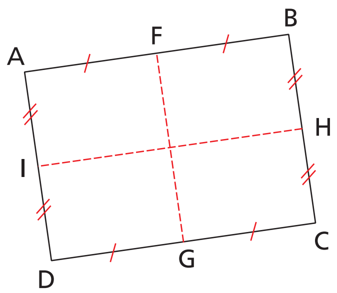


Tu repères à vue d'œil, puis tu vérifies avec tes instruments que :

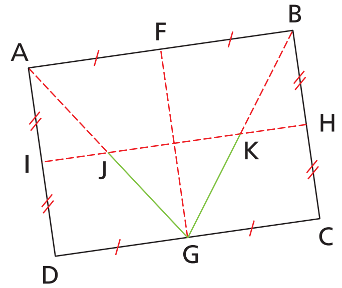
ABCD est un rectangle dont la longueur est 3,5 cm et la largeur est 2,5 cm.



F est le milieu de [AB], G est le milieu de [DC], H est le milieu de [BC], **I** est le milieu de [AD].



G, J et A sont alignés. G, K et B sont alignés.



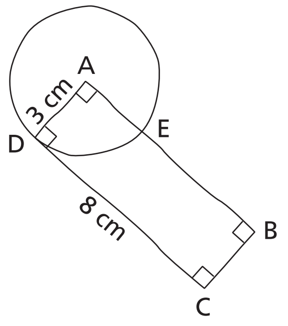
Tu peux maintenant terminer la reproduction de la figure.

Les fonctions des schémas

Un **schéma codé** comporte des indications relatives à certaines propriétés d'une figure : droites perpendiculaires, angles droits, côtés de même longueur, longueurs réelles…

À partir de ces indications, tu peux décrire la figure, la construire, ou élaborer un raisonnement. Tu peux aussi faire un schéma pour communiquer des informations sur une figure.

À partir de ce schéma à main levée, on peut trouver la longueur réelle du segment [EB].



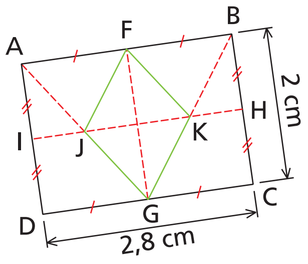
Sur ce dessin à main levée, on voit :
– un quadrilatère ABCD qui a 4 angles droits, c'est donc un rectangle ;
– un cercle de centre A et de rayon 3 cm ;
– [AE] est aussi un rayon du cercle, donc AE = 3 cm ;
– [AB] est une longueur du rectangle, donc AB = 8 cm ;
– les points A, E et B sont alignés, donc on peut calculer la longueur EB :
EB = 8 – 3
EB = 5 cm

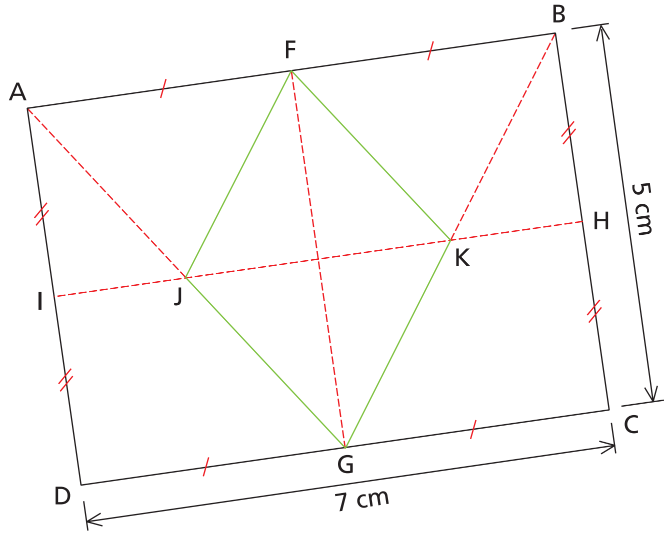
Agrandissement et réduction

Quand on **agrandit** ou on **réduit** une figure, **ses propriétés géométriques sont conservées,** en particulier les angles ne changent pas.
Les **mesures** des longueurs sur la figure modèle (voir page 25) et sur la figure réduite ou agrandie sont **proportionnelles**.

Pour agrandir ou réduire une figure on peut :

– repérer ses propriétés géométriques et les conserver lorsque l'on agrandit ou que l'on réduit la figure ;
– mesurer les dimensions et les multiplier ou les diviser toutes par le même nombre.

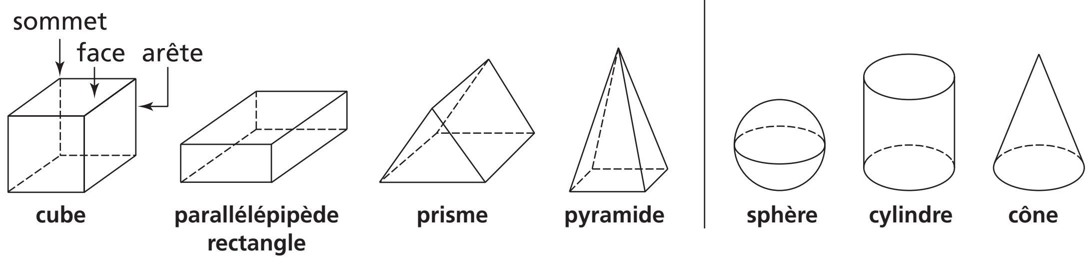




Les solides

Voici des représentations en perspective de solides :

Polyèdres | **Autres solides**



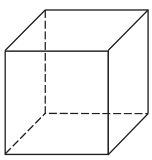
Un **polyèdre** est un solide fermé dont toutes les faces sont des polygones.

Le parallélépipède rectangle et le cube

Le parallélépipède rectangle et le cube sont des polyèdres.
Ils possèdent un certain nombre de propriétés qui n'apparaissent pas sur les dessins et qu'il faut connaître pour :
– les identifier ;
– les construire ;
– les représenter.

Sur les représentations en perspective, les formes de certaines faces ne sont pas conservées.

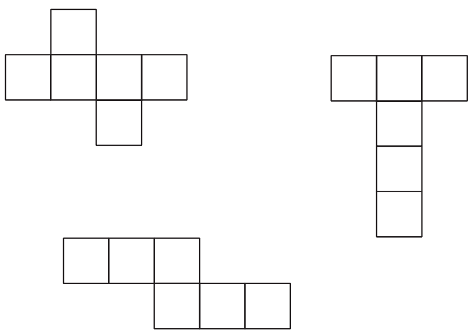
Cube



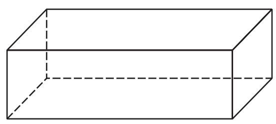
– 12 arêtes
– 8 sommets
– 6 faces carrées
– ses faces sont toutes superposables

Le cube est un polyèdre régulier.

Exemples de patron

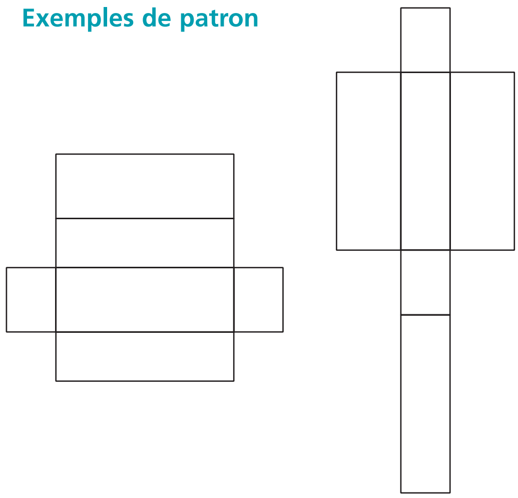


Parallélépipède rectangle



– 12 arêtes
– 8 sommets
– 6 faces rectangulaires
– ses faces sont superposables deux à deux

Exemples de patron



Grandeurs et mesures

Les **nombres décimaux** sont très utiles pour exprimer les **mesures de grandeurs** comme les longueurs, les aires, les masses, les contenances, la monnaie.

Exemples :

– les longueurs : 43 m 3 dm 6 cm = 43,36 m
– les masses : 37 kg 750 g = 37,75 kg
– la monnaie : 5 € 99 c = 5,99 €
une pièce de 1 centime vaut un centième d'euro : 1 c = 0,01 €
une pièce de 10 centimes vaut un dixième d'euro : 10 c = 0,10 €

Mesure de longueurs

• Les unités de longueur servent à mesurer une longueur, une largeur, une distance, une hauteur, un périmètre, une altitude, une profondeur, une épaisseur, une taille…

• L'**unité** conventionnelle de longueur est le **mètre** (symbole : **m**).
On utilise aussi très souvent le kilomètre (1 km = 1 000 m) et le centimètre (1 m = 100 cm).
Pour exprimer des longueurs dans différentes unités, on peut utiliser un tableau de conversion :

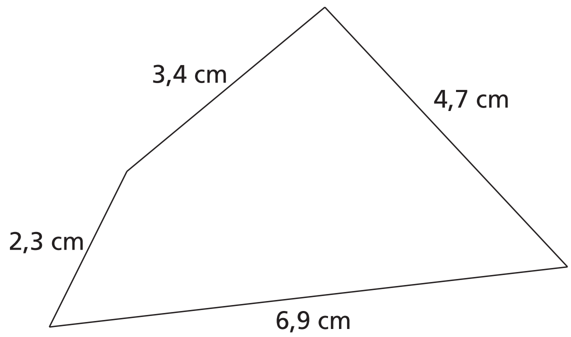
kilomètre km	hectomètre hm	décamètre dam	mètre m	décimètre dm	centimètre cm	millimètre mm
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0

1 hm = 100 m 1 cm = 0,01 m

Périmètre d'un polygone

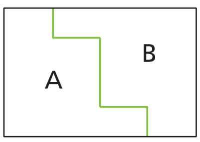
Quand on fait la somme des mesures de longueurs des côtés d'un polygone, on obtient son périmètre.

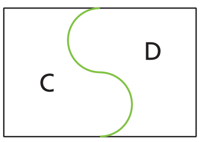
2,3 + 3,4 + 4,7 + 6,9 = 17,3
Le périmètre de ce polygone est égal à 17,3 cm.



Mesure d'aires

Des figures de différentes formes peuvent avoir la même aire.





Les figures A et B sont superposables. Elles occupent autant de place. Elles ont la même aire. Il en est de même pour les figures C et D.
Les figures A et C ne sont pas superposables. Elles ont cependant la même aire, c'est la moitié de l'aire du rectangle.

L'**unité** conventionnelle d'aire est le **mètre carré** (symbole : **m²**).
Pour exprimer des aires dans différentes unités on peut utiliser un tableau de conversion :

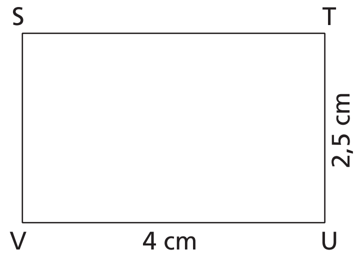
kilomètre carré km^2	hectomètre carré hm^2	décamètre carré dam^2	mètre carré m^2	décimètre carré dm^2	centimètre carré cm^2	millimètre carré mm^2
00	01	00	00	00	00	00
00	00	00	00	00	01	00

1 hm^2 = 10 000 m^2 1 cm^2 = 0,0001 m^2

Calcul de l'aire d'un rectangle

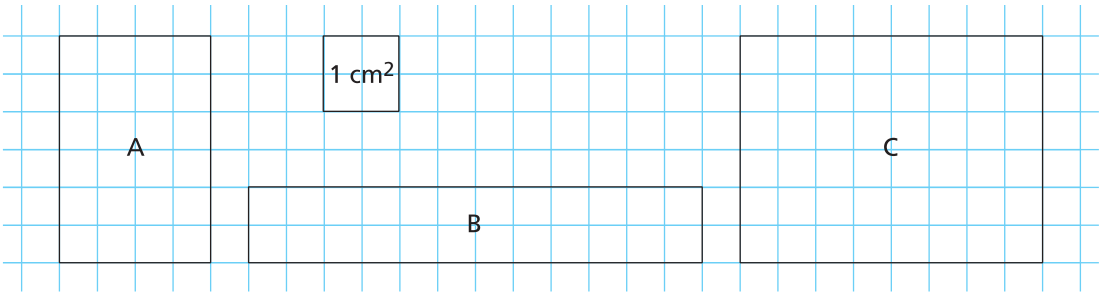
Pour calculer l'aire d'un rectangle de dimensions a et b, on fait le produit de a et de b : aire du rectangle = a × b.

Exemple : pour le rectangle STUV : 2,5 × 4 = 10
L'aire du rectangle est 10 cm^2.



Aire et périmètre

Des figures peuvent avoir la même aire sans avoir le même périmètre, ou le même périmètre sans avoir la même aire.



aire : 6 cm^2
périmètre : 10 cm

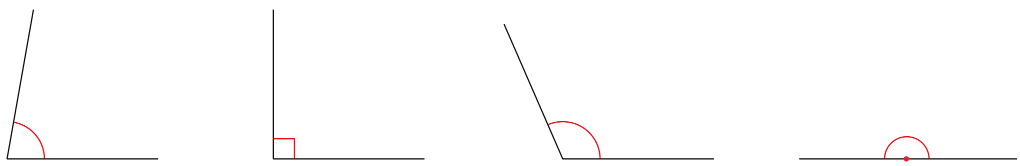
aire : 6 cm^2
périmètre : 14 cm

aire : 12 cm^2
périmètre : 14 cm

Mesure d'angles

Un angle est une surface délimitée par deux demi-droites de même origine.
Les demi-droites sont les côtés de l'angle. Leur origine est le sommet de l'angle.

Angle aigu **Angle droit** **Angle obtus** **Angle plat**



L'angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

L'angle obtus est plus grand que l'angle droit.

Mesure de masses

Pour mesurer des **masses** on utilise des balances. Certaines, comme la **balance Roberval**, utilisent la notion d'équilibre et nécessitent l'utilisation de masses marquées ; d'autres affichent directement la masse sur un écran numérique.

L'**unité** conventionnelle de masse est le **kilogramme** (symbole : **kg**).
Pour exprimer des masses dans différentes unités, on peut utiliser un tableau de conversion :

kilogramme kg	hectogramme hg	décagramme dag	gramme g	décigramme dg	centigramme cg	milligramme mg
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0

1 hg = 100 g   1 cg = 0,01 g

Mesure de contenances

Pour évaluer la **contenance** d'un récipient, on fait souvent des transvasements, en utilisant un récipient gradué de référence.

L'**unité** conventionnelle de contenance est le **litre** (symbole : **L**).
Pour exprimer des contenances dans différentes unités on peut utiliser un tableau de conversion :

hectolitre hL	décalitre daL	litre L	décilitre dL	centilitre cL	millilitre mL
0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0

1 hL = 100 L   1 cL = 0,01 L

Mesure de durées

L'**unité** conventionnelle de durée est la **seconde** (symbole : **s**).

1 minute = 60 secondes   1 heure = 60 minutes = 3 600 secondes
1 jour = 24 heures   1 année = 365 jours (366 jours tous les 4 ans)

Pour calculer une durée, on peut utiliser la technique des sauts.

Exemple :
Un train part de Rouen à 6 h 45 min. Il arrive à Paris à 8 h 33 min.
Voici une méthode pour calculer la durée du voyage

$$6\text{ h }45 \xrightarrow{\textit{15 min}} 7\text{ h} \xrightarrow{\textit{1 h 33 min}} 8\text{ h }33\text{ min}$$

1 h 33 min + 15 min = 1 h 48 min. Le trajet dure 1 h 48 min.

Index